Laurent Dietrich

Agrégation 2024 – Corrigé Analyse Probabilités

Partie I

1. (a) Comme f est continue bornée, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est continue intégrable (car dominée par e^{-t}) sur $[x, +\infty[$, ce qui justifie que $g(x)$ est bien défini. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|g(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} \left|f(t)e^{-t}\right| \mathrm{d}t \leq e^x \|f\|_\infty \int_x^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t = \|f\|_\infty$$

donc g est bornée et

$$\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \tag{1}$$

De plus en notant F une primitive de $t \mapsto f(t)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$ on a

$$g(x) = e^x \left(\lim_{+\infty} F - F(x)\right)$$

ce qui prouve que g est continue par opérations élémentaires.

(b) Par l'expression ci-dessus, g est de classe C^1 comme produit de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{g'(x) = e^x \left(\lim_{+\infty} F - F(x)\right) - e^x f(x) e^{-x} = g(x) - f(x)}$$

2. (a) Le côté bien défini de S vient d'être montré. Sa linéarité est une conséquence directe de la linéarité de l'intégrale. Sa continuité a été démontrée en (1).

(b) L'inégalité (1) assure que $\|S\|_{\mathcal{L}(CB(\mathbb{R}))} \leq 1$ donc il suffit maintenant de trouver une $f \in CB(\mathbb{R})$ qui réalise l'égalité. C'est le cas de la fonction constante égale à 1 puisque $S(x \mapsto 1) = x \mapsto 1$.

3. (a) On reprend la démonstration de (1) plus précisément : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|g(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} \left|f(t)e^{-t}\right| \mathrm{d}t \leq e^x \sup_{t \in [x,+\infty[} |f(t)| \int_x^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t \leq \sup_{t \in [x,+\infty[} |f(t)| \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par le changement de variable affine (donc licite) $\begin{cases} u = x - t \\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}t \end{cases}$ on obtient

$$g(x) = \int_x^{+\infty} e^{x-t} f(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 e^u f(x-u) \mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} e^u f(x-u) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(u) \mathrm{d}u$$

Sur cette expression on applique le théorème de convergence dominée (dans sa version à un paramètre réel x, conséquence direct de la caractérisation séquentielle de la limite).

- Convergence simple : pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^u f(x-u)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(u) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Domination : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|e^u f(x-u)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(u)| \leq e^u \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(u)$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On en conclut que $g(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} 0\mathrm{d}u = 0$

(c) On vient de démontrer que $g \in E$. Enfin, on remarque que $\Upsilon(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et de même en échangeant $+\infty$ et $-\infty$. Comme l'appartenance à E revient à avoir ces deux limites nulles, E est stable par Υ. On a aussi montré qu'il est stable par S, ce qui justifie que $\Upsilon\left(S\left(\Upsilon(f)\right)\right) \in E$.

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(x) + g(x) &= e^{-x}\int_{-x}^{+\infty} e^{-t} f(-t)\,\mathrm{d}t + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\mathrm{d}t \\
&= e^x \int_{-\infty}^{x} e^s f(s)\mathrm{d}s + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} e^{s-x} f(s)\mathrm{d}s + \int_x^{+\infty} e^{x-t} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-|x-u|}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat désiré.

(b) On a montré que $g' = g - f$. On montre de même que $\tilde{g}' = -\tilde{g} + f$. Ainsi

$$u' = \frac{1}{2}\left(g - f - \tilde{g} + f\right) = \frac{1}{2}\left(g - \tilde{g}\right)$$

est C^1 car g et $\tilde{g}$ le sont au vu des deux expressions de dérivées ci-dessus et de la continuité de f.

(c) Au vu des expressions ci-dessus,

$$u - u'' = u - \frac{1}{2}\left(g' - \tilde{g}'\right) = u - \frac{1}{2}\left(g - f + \tilde{g} - f\right) = u - \frac{1}{2}\left(g + \tilde{g}\right) + f = f$$

5. (a) On a vu en 3)c) que g et $\tilde{g}$ sont évanescentes, on en déduit que u l'est aussi comme combinaison linéaire de fonctions évanescentes, or c'est une solution de (2).

(b) Par linéarité, si v est une autre solution de (2) alors en posant $w = u - v$ on a

$$w'' - w = 0$$

donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$, or si v est évanescente alors w aussi car u l'est et alors $\lambda = \mu = 0$ donc $w = 0$ donc $v = u$.

Partie II

6. (a) Si $f \in E$ alors de par ses limites en $\pm\infty$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$ et pour tout $x < -A$, $|f(x)| \leq 1$. De plus sur le segment $[-A, A]$, f est continue donc bornée, disons par $M > 0$. Au final f est bien bornée sur $\mathbb{R}$ (par $\max(1, M)$).

   (b) Si f est la fonction nulle, tout $x_0 \in \mathbb{R}$ convient. Sinon, $\|f\|_\infty > 0$ et comme comme $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ alors il existe $A > 0$ tel que $|x| > A \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ si bien que $\sup_{\mathbb{R}} |f| = \sup_{[-A,A]} |f|$ est atteint car f est continue et $[-A, A]$ compact.

   (c) Soit $\varepsilon > 0$.
   De même que ci-dessus il existe $A > 0$ tels que $f \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ sur $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$.
   Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[-A, A]$ donc il existe $\delta > 0$ tel que pour $(x, y) \in [-A, A]^2$, $|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$.
   Prenons maintenant $x, y \in \mathbb{R}$ et supposons $|x - y| \leq \delta$.

   - Si $|x| \leq A$ et $|y| \leq A$ alors
   $$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon$$
   - Si $|x| > A$ et $|y| > A$ alors
   $$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$
   - Si $|x| \leq A$ et $|y| > A$, disons $y > A$ (le cas $y < -A$ est parfaitement similaire) alors par inégalité triangulaire
   $$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)|+|f(A) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)|+|f(y)|+|f(A)| \leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$
   car $|x - A| \leq |x - y| \leq \delta$ puisque $x \leq M \leq y$.
   - Le cas $|x| > A$ et $|y| \leq A$ est parfaitement similaire en échangeant x et y.

7. (a)
   - On a vu que $E \subset CB(\mathbb{R})$ à la question 6)a).
   - La fonction nulle est bien dans E.
   - E est stable par combinaison linéaire, par linéarité de la limite.

   (b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $f \in CB(\mathbb{R})$ telles que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Que $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ est une conséquence directe du théorème de la double limite, applicable car la convergence de f_n vers f est uniforme.

   (c) $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un sous-espace fermé de $(CB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ qui est complet, il est donc complet aussi, et c'est donc un espace de Banach.

8. (a) Que T soit bien définie de E dans E a été dit en 4). Sa linéarité est une conséquence directe de la linéarité de l'intégrale, et sa continuité conséquence de celle de S démontrée en 2)a) sur $CB(\mathbb{R}) \supset E$, et de celle de la linéarité et continuité de Υ qui est immédiate ($\|\Upsilon(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$).

   (b) Vu en tant qu'endomorphisme de $CB(\mathbb{R})$, on a vu que S est de norme 1 donc en tant qu'endomorphisme de E il est de norme inférierue ou égale à 1. Υ est clairement linéaire de norme 1. Ainsi T est de norme inférieure ou égale à 1.

Maitenant prenons η une fonction C^∞ à support compact dans $[-2,2]$, constante égale à 1 sur $[-1,1]$, et inférieure ou égale à 1 partout. On pose $f_n(x)=\eta\left(\frac{x}{n}\right)$. On a clairement $\|f_n\|_\infty=1$. De plus

$$1-e^{-2n}=\frac{1}{2}\int_{-2n}^{2n}e^{-|t|}\mathrm{d}t\leq T\left(f_n\right)(0)\leq\frac{1}{2}\int_{-n}^{n}e^{-|t|}\mathrm{d}t=1-e^{-n}$$

ce qui prouve que $\limsup\limits_{n\to+\infty}\|T(f_n)\|_\infty=1$ donc comme T est de norme inférieure ou égale à 1, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|T(f_n)\|_\infty=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\|T(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_\infty}=1$ ce qui achève de montrer que T est de norme 1.

(c) Supposons que $f\in E$ réalise cette égalité. En reprenant le x_0 de 6)b), on a alors $\|T(f)\|_\infty=f(x_0)$. Comme $T(f)\in E$ aussi, il existe $y_0\in\mathbb{R}$ tel que

$$\|T(f)\|_\infty=T(f)(y_0)=f(x_0)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-|y_0-t|}f(t)\mathrm{d}t$$

Remarquons que $\int_{\mathbb{R}}e^{-|y_0-t|}\mathrm{d}t=1$ (se voit rapidement par translation) donc

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-|y_0-t|}\left(f(t)-f(x_0)\right)\mathrm{d}t=0$$

or l'intégrande est continue négative, donc identiquement nulle, donc f est constante. Or, la seule fonction constante évanescente est la fonction nulle.

9. (a) Par le changement de variable affine (donc licite) $\begin{cases}u=\lambda t\\ \mathrm{d}u=\lambda\mathrm{d}t\end{cases}$ on obtient

$$\boxed{T_\lambda(\mathbb{1})=x\mapsto\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-|u|}\mathrm{d}u=x\mapsto 1=\mathbb{1}}$$

(b) Soit $\alpha>0$. Par le changement de variable affine $\begin{cases}u=\lambda t\\ \mathrm{d}u=\lambda\mathrm{d}t\end{cases}$ on obtient

$$\lambda\int_{|t|>\alpha}e^{-\lambda|t|}\mathrm{d}t=\int_{|u|>\lambda\alpha}e^{-|u|}\mathrm{d}u=\int_{\mathbb{R}}e^{-|u|}\mathbb{1}_{|u|>\lambda\alpha}\mathrm{d}u$$

qui tend vers 0 quand $\lambda\to+\infty$ par théorème de convergence dominée (la convergence simple est due au fait que $\alpha>0$ et l'intégrande est dominée par $e^{-|u|}$ qui est intégrable).

Remarque : on aurait pu aussi utiliser l'inégalité de Markov pour la densité de probabilité $t\mapsto\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|t|}$

(c) Soit $f\in E$. Soit $\varepsilon>0$.

Par uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$ (6c)) il existe $\delta>0$ tel que $|t|\leq\delta\Rightarrow|f(x-t)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$|T_\lambda(f)(x)-f(x)|\leq\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-\lambda|t|}\left|f(x-t)-f(x)\right|\mathrm{d}t$$

On découpe cette quantité en deux morceaux :

- $\frac{\lambda}{2}\int_{|t|\leq\delta} e^{-\lambda|t|}\,|f(x-t)-f(x)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{\lambda}{2}\int_{|t|<\delta} e^{-\lambda|t|}\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|t|}\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}$
- $\frac{\lambda}{2}\int_{|t|>\delta} e^{-\lambda|t|}\,|f(x-t)-f(x)|\,\mathrm{d}t \leq 2\|f\|_\infty \int_{|t|>\delta} e^{-\lambda|t|}\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}$ en prenant λ assez grand, disons $\lambda > A$, par la question précédente.

Au final en tant que somme de ces deux quantités, pour $\lambda > A$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|T_\lambda(f)(x) - T(x)| \leq \varepsilon$ et donc

$$\|T_\lambda(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

(d) Par la question précédente il suffit de montrer que pour tout $\lambda > 0, T_\lambda(f) \in C^2 \cap E$. En posant le changement affine $u = x - t$ on obtient

$$\begin{aligned} T_\lambda(f)(x) &= \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|x-u|} f(u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|\lambda x - t|} f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\mathrm{d}t \\ &= T\left(f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)\right)(\lambda x) \end{aligned}$$

ce qui définit bien une fonction C^2 par 4)b) car f l'est et par composition par des homothéthies qui sont évidemment C^2.

10. (a) Que F soit bien définie est clair car $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Sa continuité sur $\mathbb{R}$ est une conséquence du théorème de continuité sous le signe intégral, vu que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'on a la domination déjà donnée ci-dessus.

Son évanescence est le lemme de Riemann-Lebesgue. Précisément, intégrons par parties

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x}\sin(tx)\frac{1}{1+t^2}\right]_{t=-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(tx)}{x}\frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_{\mathbb{R}} \frac{2t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

d'où

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|x|}\int_{\mathbb{R}} \frac{2|t|}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction, notons la g, est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour pôles $\pm i$. Intégrons la sur le bord du demi-disque supérieur de centre l'origine et rayon $R > 1$. Le lemme de Jordan assure que la partie circulaire de l'intégrale tend vers 0 quand $R \longrightarrow +\infty$. En passant à la limite dans le théorème des résidus on obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(t)\mathrm{d}t = 2i\pi \mathrm{Res}\,(g,i) = 2i\pi \lim_{z\to i}(z-i)g(z) = 2i\pi \lim_{z\to i}\frac{e^{izx}}{z+i} = 2i\pi\frac{e^{-x}}{2i} = \pi e^{-x}$$

En passant à la partie réelle :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \pi e^{-x}}$$

Partie III

11. La propriété donnée en indication est une conséquence directe de la positivité de l'intégrale, plus précisément du fait que l'intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle est strictement positive. Par unicité de la solution évanescente déontrée en 5) on a alors $u = T\left(\frac{3}{2}u^2\right)$ car cette dernière fonction est bien évanescente par 8a) et solution par 4c)et donc $u > 0$ sur $\mathbb{R}$ en vertu de cette indication puisque $\frac{3}{2}u^2 \geq 0$ et est non identiquement nulle.

12. (a) $u'' = u - \frac{3}{2}u^2$ est continue et bornée comme combinaison linéaire et produit de telles fonctions.

    (b) L'inégalité de droite est conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à u entre x et $x + h$. Celle de gauche est la stricte positivité de u

    (c) L'expression de droite ci-dessus est polynomiale en h et n'a pas de racine, l'inégalité demandée est la stricte négativité de son discriminant.

    (d) $u'' = u + \frac{3}{2}u^2$ est évanescente car u l'est. u' l'est aussi grâce à l'inégalité de la question précédente.

13. (a) Ces deux fonctions se dérivent en $uu'(2-3u)$. À droite c'est direct, à gauche on utilise l'équation différentielle. Elles diffèrent donc d'une constante. Or on sait que par la question précédente que ces deux fonctions sont évanescentes, donc la constante est 0.

    (b) La positivité stricte de u a déjà été démontrée. L'autre inégalité est conséquence directe de la question précédente car u'^2 et u^2 sont positives.

    (c) Soit $x \in M$. Alors x est un point d'extremum pour u. Comme u est dérivable et $\mathbb{R}$ est ouvert, x est un point critique de u donc $u'(x) = 0$ donc par 13)a) ou bien $u(x) = 0$, ce qui est exclu par stricte positivité de u, ou bien $u(x) = 1$, ce qui a donc lieu.

    (d) L'existence d'un $x_0 \in M$ est une conséquence de 6)b) et de la positivité de u.
    Concernant l'unicité, commençons par montrer que M est discret. Si $a \in M$ alors $u(a) = 1$ et $u'(a) = 0$ et par l'équation différentielle, $u''(a) = -\frac{3}{2} < 0$ donc par continuité $u'' < 0$ au voisinage de a et donc par Taylor avec reste intégral,

    $$u(a+h) = 1 + \int_a^{a+h} (a+h-t)u''(t)\mathrm{d}t < 1$$

    pour h suffisamment petit.
    Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un $x_1 \in M$ différent de x_0, disons $x_1 > x_0$ quitte à les échanger. Alors par Rolle on aurait un point d'annulation de u' entre x_0 et x_1, et comme vu ci-dessus on aurait aussi $u(x_1) = 1$. On construit ainsi par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans M et injective. On aurait en particulier une infinité d'éléments de M dans $[x_0, x_1]$, ce qui est en contradiction avec le fait que M est fermé (image réciproque d'un fermé par u continue) et discret.

    (e) Pour tout $x > 0$,

    $$U'(x) = u'(x + x_0)$$

    Par l'expression en 13)a) et l'unicité de $x_0 \in M$, cette quantité ne s'annule pas pour $x > 0$. Comme elle définit une fonction continue de $x > 0$, elle est de signe strict constant. Si elle était strictement positive, ceci contredirait la maximalité de $u(x_0)$.

    (f) Il suffit de passer à la racine carrée dans le résultat de 13)a) écrit en $x + x_0$ et d'utiliser la négativité de U' et la positivité de U.

(g) Le résultat s'obtient en posant le changement de variable

$$\begin{cases} s = U(t) \\ \mathrm{d}s = -s\sqrt{1-s}\mathrm{d}s \end{cases}$$

licite car U est C^1 bijective sur $[0, x]$ par la question précédente. Il donne

$$\int_{U(x)}^{1} \frac{\mathrm{d}s}{s\sqrt{1-s}} = \int_{x}^{0} -1\mathrm{d}t = x$$

(h) Je pense qu'il y a une erreur dans l'indication et qu'elle voulait plutôt suggérer de poser

$$\begin{cases} s = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(t)} \\ \mathrm{d}s = -2\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^3(t)}\mathrm{d}t \end{cases}$$

Sur $[0, +\infty[$, $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$ est C^1 est bijective, d'image $]0, 1]$. Notons α l'antécédent de $U(x)$ (on a bien $0 < U(x) \leq 1$). Le changement donne

$$\int_{U(x)}^{1} \frac{\mathrm{d}s}{s\sqrt{1-s}} = \int_{\alpha}^{0} -2\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^3(t)}\mathrm{ch}^2(t)\frac{1}{\sqrt{1-1/\mathrm{ch}^2(t)}}\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{0} -2\mathrm{th}(t)\frac{1}{|\mathrm{th}(t)|}\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\alpha} 1\mathrm{d}t = 2\alpha$$

car $\mathrm{th} \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
Après calcul on obtient

$$\alpha = \mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{U(x)}}\right)$$

(i) Par les deux questions précédentes on obtient pour tout $x > 0$ que

$$2\mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{U(x)}}\right) = x$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{U(x)}} = \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$$

donc

$$U(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Le même raisonnement qui a été fait depuis 13)e) avec $x > 0$ est faisable avec $x < 0$ et mène à la même expression que ci-dessus. Par continuité en x_0 on en déduit que si u est une solution, alors nécéssairement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(\frac{x}{2})}$. Par ailleurs la synthèse se fait sans problème en calculant $u - u'' - \frac{3}{2}u^2$ qui est bien nulle avec l'expression ci-dessus.
En conclusion, la seule solution est

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

Partie IV

14. C'est la norme qui provient du produit scalaire $(u,v) \mapsto \int_{\mathbb{R}} uv + \int_{\mathbb{R}} u'v'$ (symétrie claire par commutativité du produit, linéarité à gauche par linéarité de l'intégrale, positivité par celle de l'intégrale, côté défini positif car si $\int_{\mathbb{R}} u^2 + \int_{\mathbb{R}} (u')^2 = 0$ alors en particulier $\int_{\mathbb{R}} u^2 = 0$ et par positivité et continuité , u est identiquement nulle).
15. (a) Conséquence immédiate du fait que φ^2 se dérive en $2\varphi\varphi'$ et du fait que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$ car φ est à support compact. Ainsi les trois fonctions ont la même dérivée, celle de gauche et celle du milieu ont la même limite en $-\infty$, celle de gauche et celle de droite la même limite en $+\infty$: les trois sont égales.
    (b) La seconde inégalité est $a^2 + b^2 \geq 2ab$ avec $a = \|\varphi\|_2$ et $b = \|\varphi'\|_2$.
    La première inégalité, mais sans le 2 en facteur, est l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à l'intégrale ci-dessus puis un passage au sup (et même au max) pour $x \in \mathbb{R}$.
    (c) Il suffit d'écrire
    $$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_x^y 1 \cdot |\varphi'(s)|\,\mathrm{d}s$$
    et d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
16. (a) Supposons qu'il en existe deux, disons u et v. Alors
    $$\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} (u-v)\varphi = 0$$
    Comme $C_c^1(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, il existe une suite de fonctions $\varphi_n \in C_c^1(\mathbb{R})$ telles que $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u - v$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Alors par continuité du produit scalaire,
    $$0 = \int_{\mathbb{R}} (u-v)\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} (u-v)^2$$
    donc $u - v = 0$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
    (b) C'est « le » (en réalité *un*, car le complété n'est défini qu'à isomorphisme isométrique près) complété d'un espace pré-hilbertien, c'est donc un espace de Hilbert.
    Notons V l'ensemble des fonctions de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ qui admettent une dérivée faible dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
    - Étape 1 : on démontre que V muni de la norme H^1 est un Hilbert. Cela vient du fait que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans V alors elle l'est dans L^2 et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ aussi, on peut donc extraire deux fois de sorte qu'elles convergent respectivement vers un f et un g dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Maintenant pour toute $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$, on a
    $$\int_{\mathbb{R}} f_n\varphi = -\int_{\mathbb{R}} f_n'\varphi$$
    Donc en passant à la limite on a
    $$\int_{\mathbb{R}} f\varphi = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi$$
    et donc par unicité de la dérivée faible montrée en 16)a),
    $$f' = g$$
    donc au final $f \in H^1$ et $f' = g$ et (f_n) est bien convergente.

- Étape 2 :

$$\begin{array}{ccc} C_c^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \overline{C_c^1(\mathbb{R})}^V \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

est une injection isométrique d'image dense. C'est donc une réalisation du complété désiré. Par unicité du complété à isomorphisme isométrique près, on peut donc identifier (c'est là qu'on lève l'ambiguité à isomorphisme près) H à l'adhérence de $C_c^1(\mathbb{R})$ dans V pour la norme H^1.

- Étape 3 : maintenant qu'on a fait cette identification il suffit de montrer que $C_c^1(\mathbb{R})$ est dense dans V pour la norme H^1 pour finir de répondre à la question. Ça se fait par convolution et troncature, cf. Brézis par exemple, mais c'est pénible de tout rédiger pour juste une sous-question !

Remarque : question difficile ! Pas sûr que sa difficulté, ou du moins sa longueur, ait été pleinement prévue, à cause de la définition de H employée dans le sujet. Pour information, le résultat général de coincidence des deux définitions pour les espaces de Sobolev sur un ouvert Ω a seulement été démontré en 1964 par Meyer et Serrin.

(c) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$|\tilde{v}(x) - \tilde{v}(x_0)| \leq \int_{x_0}^{x} 1 \cdot |v'(s)| \mathrm{d}s \leq \sqrt{|x - x_0|} \|v'\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

par Cauchy-Schwarz, ce qui prouve la continuité de $\tilde{v}$ en x_0.

(d) Soit $v \in H^1$ et $v_n \in C_c^1(\mathbb{R})$ telles que $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} v$ dans H^1. On applique 15)b) à v_n

$$2\|v_n\|_\infty^2 \leq \|v_n\|_{H^1}^2$$

Le terme de droite tend bien vers $\|v\|_{H^1}^2$ par continuité de la norme, celui de gauche vers $2\|v\|_\infty^2$ car (v_n) est de Cauchy dans H^1 donc dans L^∞ par 15)b) donc converge dans L^∞ (et on utilise la continuité de la norme).

On passe donc à la limite pour obtenir le résultat désiré.

De plus v est continue de par l'identification faite en 16)c). Enfin pour montrer maintenant que v est évanescente, par ce qui a été vu ci-dessus on a $\|v_n - v\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $\varepsilon > 0$, alors on aura $\|v_N - v\|_\infty \leq \varepsilon$ pour un $N \in \mathbb{N}$ fixé assez grand, or $v_N(x) = 0$ si $|x|$ est assez grand donc $|v(x)| \leq \varepsilon$ pour $|x|$ assez grand.

(e) Déjà démontré en 16)c) pour $\tilde{v}$, c'est donc pareil pour v vu que $v = \tilde{v} + C$.

(f) Soit $v \in H$. On demande de montrer que $v \in \mathrm{L}^3(\mathbb{R})$. On a vu que $v \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, de plus $v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Il suffit alors d'écrire

$$|v|^3 = |v|^2 \, |v|$$

Le premier facteur est intégrable, le second dans L^∞, donc $|v|^3$ est intégrable. En fait v est dans tous les L^p pour $p \geq 2$.

(g) Soit $v \in H^1$. Notons déjà que $v^2 = v \cdot v$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ car v l'est et v est dans L^∞ par 16)d).

On approche v par des $v_n \in C_c^1(\mathbb{R})$ telles que $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} v$ dans H^1. Comme on dérive au sens classique on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(v_n^2)' = 2v_n' v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2v'v$$

dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ car $v_n' \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v_n$ dans L^2 et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$ dans L^∞ par 16)d). Par le même raisonnement que dans l'Étape 1 en 16)b), ceci prouve que $v^2 \in \mathrm{H}^1$ et que $(v^2)' = 2vv'$.

Partie V

17. Si $\ell = 0$ alors $\ker q = \ker \ell = H$ donc $q = 0$ et n'importe quel $\lambda \in \mathbb{R}$ convient. Sinon ℓ est surjective, prenons alors $u \in H$ tel que $\ell(u) = 1$. Notons $\lambda = q(u)$. Soit $v \in H$. On a

$$\ell\left(v - \ell(v)u\right) = 0$$

donc $v - \ell(v)u \in \ker \ell \subset \ker q$ donc

$$q(v) = \lambda \ell(v)$$

donc $q = \lambda\ell$.

18. Déjà ν existe comme borne inférieure d'une partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$. Supposons par l'absurde $\nu = 0$. Alors par caractérisation séquentielle il existerait des $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans H telles que $\int_{\mathbb{R}} v_n^3 = 1$. Mais

$$\left|\int_{\mathbb{R}} v_n^3\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |v_n|^3 \leq \|v_n\|_\infty \|v_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par 16)d). Contradiction.

19. (a) Pour v et h dans H on a

$$V(v+h) - V(v) = \int_{\mathbb{R}} \left((v+h)^3 - v^3\right) = 3\int_{\mathbb{R}} v^2 h + 3\int_{\mathbb{R}} v h^2$$

Comme $h \mapsto 3\int_{\mathbb{R}} v^2 h$ est linéaire et que

$$\left|\int_{\mathbb{R}} v h^2\right| \leq \|v\|_\infty \|h\|_H^2$$

cela répond à la question.

(b) Il suffit de dériver la fonction constante $t \mapsto V(\gamma(t))$, elle se dérive en $DV(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0$, le résultat s'obtient en évaluant en $t = 0$.

(c) Il suffit de remarquer que $t \mapsto J(\gamma(t))$ est dérivable et atteint son minimum en 0 donc 0 en est un point critique.

(d) Dans les deux questions précédentes, on peut choisir la courbe γ de sorte que n'importe quel vecteur tangent à $\mathcal{V}$ en u soit $\gamma'(0)$. Or l'espace tangent à $\mathcal{V}$ est précisément $\ker DV(u)$.

Remarque : on vient de re-découvrir le théorème des extrema liés, dans une version spécifique dans un espace fonctionnel.

(e) Par 17) on obtient donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$DJ(u) = \lambda DV(u)$$

soit encore

$$\forall h \in H, \quad 2\langle u, h\rangle_{H^1} = 2\int_{\mathbb{R}} uh + 2\int_{\mathbb{R}} u'h' = \lambda 3 \int_{\mathbb{R}} u^2 h$$

On intègre par parties le terme du milieu et on rassemble le tout pour obtenir

$$\forall h \in H, \quad \int_{\mathbb{R}} \left(2u - 2u'' - 3\lambda u^2\right) h = 0$$

Le terme entre parenthèses est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et est orthogonal à H^1, qui est dense dans L^2. Il est donc nul, ce qui donne le résultat désiré (quitte à changer λ en 2λ).

(f) $2\lambda u - (2\lambda u)'' = 2\lambda\,(u - u'') = 6\lambda u^2 = \frac{3}{2}\,(2\lambda u)^2$

20. (a) À faire

(b) À faire

Partie VI

21. C'est simplement du au fait que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est invariante par translation.
22. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in \mathcal{N}$ alors $N(w_n) = 0$ donc $\|w_n\|_{H^1}^2 = \nu \int_{\mathbb{R}} w_n^3$. De plus par construction, $|w_n|$ admet son maximum en zéro. À faire
23. (a) C'est une conséquence du théorème d'Ascoli, la suite (w_n) formant une famille équi-continue car équi-1/2-holdérienne par 16)e) car $\|w_n\|_2$ est borné indépdendement de n car w_n minimisante, et car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|w_n(x)| \leq \|w_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|w_n\|_{H^1}$ est borné indépendemment de n.

    Pour la seconde propriété demandée, il suffit de passer à la limite dans l'inégalité montrée à la question précédente, $\nu \left|w_{\sigma(n)}(0)\right| \geq 1$.

    (b) Il suffit de remarquer que (u_n) est bornée dans H^1 car (w_n) l'est car elle est minimisante, comme dit ci-dessus.

    (c) Il s'agit de montrer que

    $$\|u\|_H^2 \leq \lim_{n \to +\infty} \|u_n\|_H^2$$

    ce qui est vrai car la norme est semi-continue inférieurement pour la topologie faible (conséquence de Hahn-Banach).