QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
D $\{(0,0)\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $x^2 - y^2$
B $|x| - |y|$
C $(x-y)^2$
D $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$

Question 3 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
C $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.
B Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
C Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\max_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$ B $\sum_{k=1}^n |x_k|$ C $\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^3\right)^{1/3}$ D $\sum_{k=1}^n |x_k|^2$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
B Toutes les distances rendent E complet.
C Toute les normes sont équivalentes.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union quelconque
B Le complémentaire
C Une intersection quelconque
D Une union finie
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
B Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
C f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A simplement
B uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
D presque partout
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 11 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 1$
B $\alpha > 2$
C $\alpha < 1$
D $\alpha < 2$

Question 12 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Faux
B Vrai

Question 13 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A $\mathbb{Q}$
B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
C Tout ensemble fini
D Tout ensemble dénombrable
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est bornée
B f est positive
C $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
D f est continue
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_X f_n(x) \mathrm{d}x$.

A Les f_n sont positives
B (f_n) est une suite croissante de fonctions
C Les f_n sont intégrables
D (f_n) est une suite de fonctions croissantes
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
B Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.
C Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

Question 17 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$
B $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
C $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.* Remplir complètement *les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.

QUESTION 1 : A B C D E
QUESTION 2 : A B C D
QUESTION 3 : A B C D E
QUESTION 4 : A B C D
QUESTION 5 : A B C D E
QUESTION 6 : A B C D
QUESTION 7 : A B C D E
QUESTION 8 : A B C D
QUESTION 9 : A B C D E
QUESTION 10 : A B C
QUESTION 11 : A B C D
QUESTION 12 : A B
QUESTION 13 : A B C D E
QUESTION 14 : A B C D E
QUESTION 15 : A B C D E
QUESTION 16 : A B C
QUESTION 17 : A B C D

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|x| - |y|$
B $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$
C $x^2 - y^2$
D $(x-y)^2$

Question 3 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union quelconque
B Une intersection quelconque
C Le complémentaire
D Une union finie
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.
B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
C Toutes les distances rendent E complet.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
B $\{(0,0)\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.

B Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.

C Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.

B Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.

C f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ B $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ C $\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ D $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Sur $[0, 1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A presque partout

B uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).

D simplement

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 11 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

B Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

C Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

Question 12 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

B $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$

C $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Faux
B Vrai

Question 14 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?
A Tout ensemble dénombrable
B Tout ensemble fini
C $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
D $\mathbb{Q}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

A $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
B f est positive
C f est continue
D f est bornée
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si
A $\alpha < 2$
B $\alpha > 2$
C $\alpha < 1$
D $\alpha > 1$

Question 17 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.
A Les f_n sont positives
B (f_n) est une suite de fonctions croissantes
C (f_n) est une suite croissante de fonctions
D Les f_n sont intégrables
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D E
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D E
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C
Question 11 : A B C
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D E

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
B Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
C Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
B Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.
C Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union quelconque
B Une intersection quelconque
C Le complémentaire
D Une union finie
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
C $\{(0,0)\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ B $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ C $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ D $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
D $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toutes les distances rendent E complet.
B Toute les normes sont équivalentes.
C E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$
B $(x-y)^2$
C $|x| - |y|$
D $x^2 - y^2$

Question 9 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est positive
B f est bornée
C $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
D f est continue
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
B presque partout
C uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D simplement
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 12 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$
B $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$
C $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A (f_n) est une suite croissante de fonctions
B Les f_n sont intégrables
C Les f_n sont positives
D (f_n) est une suite de fonctions croissantes
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Faux
B Vrai

Question 15 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A Tout ensemble dénombrable
B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
C $\mathbb{Q}$
D Tout ensemble fini
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 2$
B $\alpha < 2$
C $\alpha > 1$
D $\alpha < 1$

Question 17 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
B Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.
C Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

QUESTION 1 : A B C D
QUESTION 2 : A B C D
QUESTION 3 : A B C D E
QUESTION 4 : A B C D E
QUESTION 5 : A B C D E
QUESTION 6 : A B C D E
QUESTION 7 : A B C D
QUESTION 8 : A B C D
QUESTION 9 : A B C D E
QUESTION 10 : A B C D E
QUESTION 11 : A B C
QUESTION 12 : A B C D
QUESTION 13 : A B C D E
QUESTION 14 : A B
QUESTION 15 : A B C D E
QUESTION 16 : A B C D
QUESTION 17 : A B C

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.
B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
C Toutes les distances rendent E complet.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ B $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2$ C $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ D $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
B Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.
C Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
B f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
C Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Le complémentaire
B Une union quelconque
C Une intersection quelconque
D Une union finie
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
B $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
D $\{(0,0)\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $x^2 - y^2$
B $(x-y)^2$
C $|x| - |y|$
D $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$

Question 9 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 10 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A (f_n) est une suite croissante de fonctions
B Les f_n sont intégrables
C Les f_n sont positives
D (f_n) est une suite de fonctions croissantes
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A Tout ensemble dénombrable
B $\mathbb{Q}$
C Tout ensemble fini
D $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
B Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.
C Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

Question 13 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha < 1$
B $\alpha < 2$
C $\alpha > 1$
D $\alpha > 2$

Question 14 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est continue
B f est bornée
C f est positive
D $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Vrai
B Faux

Question 16 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$
B $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
C $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A presque partout
B uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
D simplement
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D E
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D E

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union quelconque
B Une union finie
C Le complémentaire
D Une intersection quelconque
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
B Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.
C Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$
B $(x-y)^2$
C $|x| - |y|$
D $x^2 - y^2$

Question 4 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ B $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ C $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ D $\max_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
B Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
C Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
D $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toutes les distances rendent E complet.
B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
C Toute les normes sont équivalentes.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(0,0)\}$
B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
B Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.
C Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

Question 10 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 2$
B $\alpha < 2$
C $\alpha < 1$
D $\alpha > 1$

Question 11 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A presque partout
B au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
C uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
D simplement
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A $\mathbb{Q}$
B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
C Tout ensemble dénombrable
D Tout ensemble fini
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

B $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$

C $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 15 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x) \mathrm{d}x = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_X f_n(x) \mathrm{d}x$.

A (f_n) est une suite croissante de fonctions

B Les f_n sont positives

C Les f_n sont intégrables

D (f_n) est une suite de fonctions croissantes

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2 + y^2))$

B f est bornée

C f est positive

D f est continue

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x) \mathrm{d}x$$

A Faux

B Vrai

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.* Remplir complètement *les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D E
Question 9 : A B C
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C D E
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C D E
Question 17 : A B

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ B $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ C $\max_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$ D $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$
B $x^2 - y^2$
C $(x-y)^2$
D $|x| - |y|$

Question 3 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union finie
B Une intersection quelconque
C Une union quelconque
D Le complémentaire
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
B $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
B Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
C f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\right\}$
B $\{(0,0)\}$
C $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$
D $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\right\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.
B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
C Toutes les distances rendent E complet.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
B Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.
C Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est positive
B $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
C f est continue
D f est bornée
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A Les f_n sont intégrables
B Les f_n sont positives
C (f_n) est une suite de fonctions croissantes
D (f_n) est une suite croissante de fonctions
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x) \mathrm{d}x$$

A Faux
B Vrai

Question 12 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha < 1$
B $\alpha < 2$
C $\alpha > 2$
D $\alpha > 1$

Question 13 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$

B $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

C $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

B Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

C Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

Question 15 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

B Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 16 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A Tout ensemble dénombrable

B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

C $\mathbb{Q}$

D Tout ensemble fini

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 ♣ Sur $[0, 1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A presque partout

B uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).

D simplement

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D E
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C
Question 15 : A B C
Question 16 : A B C D E
Question 17 : A B C D E

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$
B $x^2 - y^2$
C $|x| - |y|$
D $(x-y)^2$

Question 2 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.
B Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
C Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x - y\|$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
D $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toutes les distances rendent E complet.
B Toute les normes sont équivalentes.
C E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\sum_{k=1}^n |x_k|$ B $\sum_{k=1}^n |x_k|^2$ C $\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^3\right)^{1/3}$ D $\max_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
B $\{(0,0)\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Le complémentaire
B Une union finie
C Une union quelconque
D Une intersection quelconque
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
B Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
C Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$
B $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$
C $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 1$
B $\alpha < 2$
C $\alpha < 1$
D $\alpha > 2$

Question 11 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
B f est bornée
C f est positive
D f est continue
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A (f_n) est une suite croissante de fonctions
B (f_n) est une suite de fonctions croissantes
C Les f_n sont positives
D Les f_n sont intégrables
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.
B Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.
C Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

Question 14 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
B Tout ensemble fini
C Tout ensemble dénombrable
D $\mathbb{Q}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 16 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Faux
B Vrai

Question 17 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
B uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
C presque partout
D simplement
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D E
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D E
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C D E
Question 13 : A B C
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B C
Question 16 : A B
Question 17 : A B C D E

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
B Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
C f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
B Toutes les distances rendent E complet.
C Toute les normes sont équivalentes.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
B $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $x^2 - y^2$
B $|x| - |y|$
C $(x-y)^2$
D $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$

Question 5 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une intersection quelconque
B Le complémentaire
C Une union quelconque
D Une union finie
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.

B Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.

C Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(0,0)\}$

B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$

D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ B $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ C $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ D $\displaystyle\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

B Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

C Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

Question 10 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Faux

B Vrai

Question 11 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A (f_n) est une suite de fonctions croissantes

B (f_n) est une suite croissante de fonctions

C Les f_n sont positives

D Les f_n sont intégrables

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).

B presque partout

C uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D simplement

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
B Tout ensemble dénombrable
C $\mathbb{Q}$
D Tout ensemble fini
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$
B $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
C $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha < 1$
B $\alpha < 2$
C $\alpha > 1$
D $\alpha > 2$

Question 16 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 17 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est bornée
B f est positive
C $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
D f est continue
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D

Question 2 : A B C D

Question 3 : A B C D E

Question 4 : A B C D

Question 5 : A B C D E

Question 6 : A B C D

Question 7 : A B C D E

Question 8 : A B C D E

Question 9 : A B C

Question 10 : A B

Question 11 : A B C D E

Question 12 : A B C D E

Question 13 : A B C D E

Question 14 : A B C D

Question 15 : A B C D

Question 16 : A B C

Question 17 : A B C D E

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}$, $\quad f \mapsto f(0)$
B $E \to \mathbb{R}$, $\quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
C $F \to F$, $\quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
D $E \to \mathbb{R}$, $\quad f \mapsto f'(0)$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(0,0)\}$
B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.
B Toutes les distances rendent E complet.
C E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|$ B $\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^2$ C $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^3\right)^{1/3}$ D $\displaystyle\max_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
B f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
C Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.

B Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.

C Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une intersection quelconque

B Une union finie

C Le complémentaire

D Une union quelconque

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $(x - y)^2$

B $|x| - |y|$

C $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$

D $x^2 - y^2$

Question 9 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha < 2$

B $\alpha > 1$

C $\alpha < 1$

D $\alpha > 2$

Question 10 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A Les f_n sont intégrables

B (f_n) est une suite croissante de fonctions

C Les f_n sont positives

D (f_n) est une suite de fonctions croissantes

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

B Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

C Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

Question 12 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$

B $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

C $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 14 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Faux
B Vrai

Question 15 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

A f est positive
B $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
C f est bornée
D f est continue
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f
A uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
B simplement
C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
D presque partout
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?
A Tout ensemble fini
B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
C Tout ensemble dénombrable
D $\mathbb{Q}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D E
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B C
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C
Question 14 : A B
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C D E
Question 17 : A B C D E

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $x^2 - y^2$
B $(x-y)^2$
C $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$
D $|x| - |y|$

Question 2 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
C $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.
B Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
C Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^3\right)^{1/3}$ B $\sum\limits_{k=1}^n |x_k|$ C $\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2$ D $\max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(0,0)\}$
B $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 2\}$
C $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x > 0\}$
D $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
B Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
C Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union quelconque
B Une intersection quelconque
C Le complémentaire
D Une union finie
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toutes les distances rendent E complet.
B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
C Toute les normes sont équivalentes.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A presque partout
B uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
C simplement
D au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 2$
B $\alpha < 1$
C $\alpha < 2$
D $\alpha > 1$

Question 11 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A (f_n) est une suite croissante de fonctions
B (f_n) est une suite de fonctions croissantes
C Les f_n sont intégrables
D Les f_n sont positives
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est continue
B f est positive
C $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
D f est bornée
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 14 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?
A Tout ensemble dénombrable
B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
C Tout ensemble fini
D $\mathbb{Q}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Vrai
B Faux

Question 16 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.
A Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
B Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.
C Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

Question 17 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?
A $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$
B $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
C $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1,+\infty[$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D E
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C D E
Question 13 : A B C
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B
Question 16 : A B C
Question 17 : A B C D

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
B Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
C f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
B $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
C $\{(0, 0)\}$
D $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ B $\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ C $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ D $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.
B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
C Toutes les distances rendent E complet.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|x| - |y|$
B $x^2 - y^2$
C $|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)|$
D $(x - y)^2$

Question 6 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.
B Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.
C Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Le complémentaire
B Une union finie
C Une intersection quelconque
D Une union quelconque
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
B $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 10 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A $\mathbb{Q}$
B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
C Tout ensemble dénombrable
D Tout ensemble fini
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.
B Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.
C Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

Question 12 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Vrai
B Faux

Question 13 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 2$
B $\alpha < 2$
C $\alpha > 1$
D $\alpha < 1$

Question 14 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A presque partout

B uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).

D simplement

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

B $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$

C $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A Les f_n sont positives

B Les f_n sont intégrables

C (f_n) est une suite de fonctions croissantes

D (f_n) est une suite croissante de fonctions

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2 + y^2))$

B f est bornée

C f est positive

D f est continue

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D E
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D E
Question 8 : A B C D E
Question 9 : A B C
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B C
Question 12 : A B
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D E
Question 17 : A B C D E

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $(x-y)^2$
B $|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)|$
C $x^2 - y^2$
D $|x| - |y|$

Question 2 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ B $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$ C $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ D $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union finie
B Une union quelconque
C Le complémentaire
D Une intersection quelconque
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
D $F \to F, \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
B Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
C f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.

B Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.

C Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.

B Toute les normes sont équivalentes.

C Toutes les distances rendent E complet.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$

B $\{(0, 0)\}$

C $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

D $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

C Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 10 ♣ Sur $[0, 1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).

B simplement

C presque partout

D uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Vrai

B Faux

Question 12 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$

B $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

C $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
B f est bornée
C f est positive
D f est continue
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.
A Les f_n sont intégrables
B Les f_n sont positives
C (f_n) est une suite de fonctions croissantes
D (f_n) est une suite croissante de fonctions
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.
A Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.
B Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
C Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

Question 16 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?
A Tout ensemble fini
B $\mathbb{Q}$
C Tout ensemble dénombrable
D $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si
A $\alpha < 1$
B $\alpha > 1$
C $\alpha < 2$
D $\alpha > 2$

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D E
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D E
Question 9 : A B C
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D E
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B C
Question 16 : A B C D E
Question 17 : A B C D

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.
B Toutes les distances rendent E complet.
C E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
B Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
C Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.
B Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
C Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(0, 0)\}$
B $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
C $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
D $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$ B $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2$ C $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$ D $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union finie
B Le complémentaire
C Une union quelconque
D Une intersection quelconque
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|x| - |y|$
B $(x - y)^2$
C $x^2 - y^2$
D $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$

Question 9 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$
B $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$
C $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha < 1$
B $\alpha < 2$
C $\alpha > 2$
D $\alpha > 1$

Question 11 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 12 ♣ Sur $[0, 1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
B presque partout
C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
D simplement
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A Tout ensemble fini
B Tout ensemble dénombrable
C $\mathbb{Q}$
D $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x) \mathrm{d}x$$

A Faux
B Vrai

Question 15 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
B f est positive
C f est continue
D f est bornée
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A (f_n) est une suite croissante de fonctions
B (f_n) est une suite de fonctions croissantes
C Les f_n sont intégrables
D Les f_n sont positives
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.
B Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
C Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D

Question 2 : A B C D E

Question 3 : A B C D

Question 4 : A B C D

Question 5 : A B C D E

Question 6 : A B C D E

Question 7 : A B C D E

Question 8 : A B C D

Question 9 : A B C D

Question 10 : A B C D

Question 11 : A B C

Question 12 : A B C D E

Question 13 : A B C D E

Question 14 : A B

Question 15 : A B C D E

Question 16 : A B C D E

Question 17 : A B C

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(0,0)\}$
B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toutes les distances rendent E complet.
B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
C Toute les normes sont équivalentes.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
B $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\max_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$ B $\sum_{k=1}^n |x_k|$ C $\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^3\right)^{1/3}$ D $\sum_{k=1}^n |x_k|^2$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.
B Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
C Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Le complémentaire
B Une union finie
C Une intersection quelconque
D Une union quelconque
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $(x-y)^2$
B x^2-y^2
C $|x|-|y|$
D $|\mathrm{Arctan}(x)-\mathrm{Arctan}(y)|$

Question 8 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
B Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
C f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1,+\infty[$
B $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
C $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 1$
B $\alpha < 1$
C $\alpha > 2$
D $\alpha < 2$

Question 11 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A $\mathbb{Q}$
B Tout ensemble dénombrable
C $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
D Tout ensemble fini
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 13 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
B f est positive
C f est continue
D f est bornée
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.
A Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.
B Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
C Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

Question 15 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x) \mathrm{d}x$$

A Faux
B Vrai

Question 16 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f
A simplement
B presque partout
C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
D uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x) \mathrm{d}x = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_X f_n(x) \mathrm{d}x$.
A Les f_n sont positives
B (f_n) est une suite de fonctions croissantes
C Les f_n sont intégrables
D (f_n) est une suite croissante de fonctions
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

QUESTION 1 : A B C D E
QUESTION 2 : A B C D
QUESTION 3 : A B C D E
QUESTION 4 : A B C D E
QUESTION 5 : A B C D
QUESTION 6 : A B C D E
QUESTION 7 : A B C D
QUESTION 8 : A B C D
QUESTION 9 : A B C D
QUESTION 10 : A B C D
QUESTION 11 : A B C D E
QUESTION 12 : A B C
QUESTION 13 : A B C D E
QUESTION 14 : A B C
QUESTION 15 : A B
QUESTION 16 : A B C D E
QUESTION 17 : A B C D E

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
B $E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$
C $E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f'(0)$
D $F \to F$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Le complémentaire
B Une intersection quelconque
C Une union quelconque
D Une union finie
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
B Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
C Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\max_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$ B $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ C $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ D $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.
B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
C Toutes les distances rendent E complet.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.

B Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.

C Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|x| - |y|$

B $(x-y)^2$

C $x^2 - y^2$

D $|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)|$

Question 8 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

B $\{(0,0)\}$

C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$

D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A (f_n) est une suite de fonctions croissantes

B Les f_n sont positives

C Les f_n sont intégrables

D (f_n) est une suite croissante de fonctions

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

B Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

C Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

Question 11 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A Tout ensemble dénombrable

B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

C $\mathbb{Q}$

D Tout ensemble fini

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A simplement

B uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).

D presque partout

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 14 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 2$
B $\alpha < 1$
C $\alpha > 1$
D $\alpha < 2$

Question 15 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est positive
B f est bornée
C $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
D f est continue
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Vrai
B Faux

Question 17 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$
B $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$
C $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.* Remplir complètement *les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D E
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C D E
Question 13 : A B C
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B
Question 17 : A B C D

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f'(0)$
B $E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$
C $E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
D $F \to F$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
B Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
C f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.
B Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.
C Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une intersection quelconque
B Une union quelconque
C Le complémentaire
D Une union finie
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
B $\{(0,0)\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ B $\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ C $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3 \right)^{1/3}$ D $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $x^2 - y^2$
B $|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)|$
C $|x| - |y|$
D $(x - y)^2$

Question 8 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
B Toutes les distances rendent E complet.
C Toute les normes sont équivalentes.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A (f_n) est une suite de fonctions croissantes
B Les f_n sont intégrables
C (f_n) est une suite croissante de fonctions
D Les f_n sont positives
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.
B Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.
C Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

Question 11 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A Tout ensemble fini
B $\mathbb{Q}$
C Tout ensemble dénombrable
D $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Vrai
B Faux

Question 13 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$
B $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$
C $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A simplement

B au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).

C uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D presque partout

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est continue

B $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$

C f est positive

D f est bornée

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 17 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha < 2$

B $\alpha > 2$

C $\alpha < 1$

D $\alpha > 1$

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C
Question 17 : A B C D

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une intersection quelconque
B Une union quelconque
C Le complémentaire
D Une union finie
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
B Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
C Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.
B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
C Toutes les distances rendent E complet.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
B $\{(0,0)\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ B $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ C $\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ D $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.

B Dans un espace vectoriel, toute norme $\| \cdot \|$ donne lieu à une distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.

C Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\| \cdot \|_\infty$, est un carré.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|x| - |y|$

B $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$

C $x^2 - y^2$

D $(x - y)^2$

Question 9 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

B Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

C Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

Question 10 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A Tout ensemble dénombrable

B $\mathbb{Q}$

C Tout ensemble fini

D $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A Les f_n sont positives

B Les f_n sont intégrables

C (f_n) est une suite croissante de fonctions

D (f_n) est une suite de fonctions croissantes

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$

B $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

C $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Vrai

B Faux

Question 14 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 1$
B $\alpha > 2$
C $\alpha < 1$
D $\alpha < 2$

Question 15 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est bornée
B f est continue
C f est positive
D $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A simplement
B presque partout
C uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.* Remplir complètement *les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D E
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C D E
Question 17 : A B C

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
D $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
B f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
C Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
D $\{(0,0)\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $x^2 - y^2$
B $(x-y)^2$
C $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$
D $|x| - |y|$

Question 5 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toutes les distances rendent E complet.
B Toute les normes sont équivalentes.
C E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Le complémentaire
B Une union quelconque
C Une union finie
D Une intersection quelconque
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
B Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.
C Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ B $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ C $\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ D $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ |f(x, y)| \leq \exp(-(x^2 + y^2))$
B f est positive
C f est bornée
D f est continue
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 2$
B $\alpha < 1$
C $\alpha < 2$
D $\alpha > 1$

Question 11 ♣ Sur $[0, 1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A presque partout
B simplement
C uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
D au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A Tout ensemble fini
B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
C $\mathbb{Q}$
D Tout ensemble dénombrable
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Faux
B Vrai

Question 14 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?
A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$
B $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$
C $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.
A (f_n) est une suite croissante de fonctions
B Les f_n sont positives
C (f_n) est une suite de fonctions croissantes
D Les f_n sont intégrables
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.
A Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
B Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.
C Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

Question 17 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?
A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D E
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D E
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C D E
Question 13 : A B
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C
Question 17 : A B C

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
D $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
B f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
C Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $(x-y)^2$
B $x^2 - y^2$
C $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$
D $|x| - |y|$

Question 4 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^2$ B $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^3\right)^{1/3}$ C $\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|$ D $\displaystyle\max_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
C $\{(0,0)\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union quelconque
B Le complémentaire
C Une union finie
D Une intersection quelconque
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toutes les distances rendent E complet.
B Toute les normes sont équivalentes.
C E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.
B Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.
C Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 1$
B $\alpha < 2$
C $\alpha > 2$
D $\alpha < 1$

Question 10 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est positive
B $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x, y)| \leq \exp(-(x^2 + y^2))$
C f est continue
D f est bornée
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A Les f_n sont intégrables
B (f_n) est une suite de fonctions croissantes
C Les f_n sont positives
D (f_n) est une suite croissante de fonctions
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 13 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$

B $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

C $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1,+\infty[$

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A presque partout

B au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).

C uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D simplement

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A Tout ensemble fini

B $\mathbb{Q}$

C Tout ensemble dénombrable

D $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

B Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

C Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

Question 17 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Faux

B Vrai

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C
Question 17 : A B

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$
B $|x| - |y|$
C $(x-y)^2$
D $x^2 - y^2$

Question 2 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ B $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ C $\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ D $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
B Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
C Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
B $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union finie
B Une union quelconque
C Le complémentaire
D Une intersection quelconque
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(0,0)\}$
B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
B Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.
C Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
B Toute les normes sont équivalentes.
C Toutes les distances rendent E complet.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A presque partout
B au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
C uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D simplement
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \le g(x)$.
B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \le g(x)$.
C Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \le g(x)$.

Question 11 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$
B $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
C $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1,+\infty[$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.
B Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
C Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

Question 13 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A Les f_n sont positives
B (f_n) est une suite croissante de fonctions
C Les f_n sont intégrables
D (f_n) est une suite de fonctions croissantes
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 2$
B $\alpha < 1$
C $\alpha > 1$
D $\alpha < 2$

Question 15 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est bornée
B f est continue
C f est positive
D $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A Tout ensemble fini
B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
C $\mathbb{Q}$
D Tout ensemble dénombrable
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Faux
B Vrai

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C
Question 13 : A B C D E
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C D E
Question 17 : A B

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ B $\max_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$ C $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ D $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
B Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
C Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union finie
B Le complémentaire
C Une union quelconque
D Une intersection quelconque
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|x| - |y|$
B $x^2 - y^2$
C $(x - y)^2$
D $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$

Question 5 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
B $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.
B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
C Toutes les distances rendent E complet.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(0,0)\}$
B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
B Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.
C Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A simplement
B presque partout
C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
D uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
B f est positive
C f est bornée
D f est continue
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha < 2$
B $\alpha > 1$
C $\alpha < 1$
D $\alpha > 2$

Question 12 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 13 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A $\mathbb{Q}$
B Tout ensemble fini
C $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
D Tout ensemble dénombrable
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x) \mathrm{d}x$$

A Vrai
B Faux

Question 15 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
B $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$
C $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A (f_n) est une suite de fonctions croissantes
B Les f_n sont intégrables
C (f_n) est une suite croissante de fonctions
D Les f_n sont positives
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
B Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.
C Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.* Remplir complètement *les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D E
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D E
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C
Question 13 : A B C D E
Question 14 : A B
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D E
Question 17 : A B C

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|x| - |y|$
B $x^2 - y^2$
C $(x-y)^2$
D $|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)|$

Question 2 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
B $\{(0,0)\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
B f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
C Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ B $\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ C $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ D $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
D $F \to F, \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.

B Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.

C Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union quelconque

B Une intersection quelconque

C Une union finie

D Le complémentaire

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.

B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.

C Toutes les distances rendent E complet.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

B Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

C Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

Question 10 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A Tout ensemble dénombrable

B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

C $\mathbb{Q}$

D Tout ensemble fini

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

B presque partout

C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).

D simplement

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha < 1$

B $\alpha > 2$

C $\alpha > 1$

D $\alpha < 2$

Question 13 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Vrai

B Faux

Question 14 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

A f est bornée
B f est positive
C f est continue
D $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \le \exp(-(x^2+y^2))$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n\in\mathbb{N}$ et presque tout $x\in X$, $|f_n(x)| \le g(x)$.
B Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n\in\mathbb{N}$ et presque tout $x\in X$, $|f_n(x)| \le g(x)$.
C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in X$, $|f_n(x)| \le g(x)$.

Question 16 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A Les f_n sont intégrables
B Les f_n sont positives
C (f_n) est une suite croissante de fonctions
D (f_n) est une suite de fonctions croissantes
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x\mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
B $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1,+\infty[$
C $x\mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D E
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B C
Question 16 : A B C D E
Question 17 : A B C D

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ B $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ C $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ D $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
B Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
C Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $x^2 - y^2$
B $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$
C $|x| - |y|$
D $(x - y)^2$

Question 4 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
B $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
C $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
D $\{(0, 0)\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.
B E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
C Toutes les distances rendent E complet.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.
B Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.
C Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
B $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
D $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union quelconque
B Une intersection quelconque
C Une union finie
D Le complémentaire
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
B f est bornée
C f est positive
D f est continue
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A (f_n) est une suite croissante de fonctions
B Les f_n sont intégrables
C Les f_n sont positives
D (f_n) est une suite de fonctions croissantes
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Faux
B Vrai

Question 12 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?

A $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
B $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$
C $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1,+\infty[$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 ♣ Sur $[0, 1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A presque partout

B simplement

C uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.

B Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

C Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

Question 15 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

B Tout ensemble fini

C Tout ensemble dénombrable

D $\mathbb{Q}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

C Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 17 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha < 1$

B $\alpha > 1$

C $\alpha < 2$

D $\alpha > 2$

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D E
Question 8 : A B C D E
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D E
Question 14 : A B C
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C
Question 17 : A B C D

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x, 0)$.
B Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.
C Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
B $\{(0, 0)\}$
C $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
D $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Le complémentaire
B Une intersection quelconque
C Une union finie
D Une union quelconque
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.
B f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
C Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|x| - |y|$
B $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$
C $(x - y)^2$
D $x^2 - y^2$

Question 6 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ B $\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ C $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ D $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.
On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f'(0)$
B $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$
C $E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$
D $F \to F, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A Toute les normes sont équivalentes.
B Toutes les distances rendent E complet.
C E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A $\mathbb{Q}$
B Tout ensemble fini
C $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
D Tout ensemble dénombrable
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si

A $\alpha > 1$
B $\alpha < 2$
C $\alpha > 2$
D $\alpha < 1$

Question 11 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.

A Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe
B Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.
C Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.

Question 12 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Vrai
B Faux

Question 13 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
B Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.
C Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 14 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

A f est bornée
B f est continue
C $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
D f est positive
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f
A uniformément, c'est-à-dire que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
B au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).
C presque partout
D simplement
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?
A $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$
B $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1,1[\setminus \{0\}$
C $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.
A Les f_n sont intégrables
B (f_n) est une suite croissante de fonctions
C (f_n) est une suite de fonctions croissantes
D Les f_n sont positives
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. **Remplir complètement** ***les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.***

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D E
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D E
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C
Question 12 : A B
Question 13 : A B C
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D E

QCM1 **Centrale-Supélec**

CIP-EDP
Examen du 18/02/2020

Durée : 30 minutes.

- *Le seul matériel autorisé est un stylo noir ou bleu ou un crayon de papier, du correcteur blanc ou une gomme, et deux feuilles de brouillon fournies.*
- *Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Si aucune des réponses au-dessus n'est correcte vous* devez *cocher* aucune de ces réponses n'est correcte. *Les autres ont une unique bonne réponse.*
- *Les réponses doivent être données uniquement sur le document réponse à la fin du sujet. Il ne faut rien écrire ailleurs.*

Question 1 ♣ Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, quelles expressions définissent une norme ?

A $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{1/3}$ B $\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ C $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ D $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, lesquels sont ouverts ?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$
B $\{(0,0)\}$
C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 Quelle expression ci-dessous définit une distance sur $\mathbb{R}$?

A $|x| - |y|$
B $|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)|$
C $(x-y)^2$
D $x^2 - y^2$

Question 4 ♣ Dans un espace vectoriel E de dimension finie.

A E muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.
B Toutes les distances rendent E complet.
C Toute les normes sont équivalentes.
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ On note $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. On note F l'espace vectoriel des suites réelles muni de la norme $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

On admet que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont continues ?

A $E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
B $E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$
C $E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f'(0)$
D $F \to F$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Dans un espace vectoriel, toute norme $\|\cdot\|$ donne lieu à une distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$.

B Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère unité (de centre l'origine et rayon 1) pour la distance provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un carré.

C Dans un espace vectoriel, toute distance d donne lieu à une norme définie par $\|x\| = d(x,0)$.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Soit f une fonction entre deux espaces métriques X et Y. Quelles assertions ci-dessous sont vraies ?

A Si f est lipschitzienne sur X, alors elle est continue sur X.

B f est continue sur X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.

C Si f est continue sur X, alors elle est lipschitzienne sur X.

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Quelles opérations ci-dessous sur des ensembles fermés donnent encore un ensemble fermé ?

A Une union quelconque

B Une intersection quelconque

C Une union finie

D Le complémentaire

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, quels ensembles ci-dessous sont négligeables ?

A $\mathbb{Q}$

B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

C Tout ensemble dénombrable

D Tout ensemble fini

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers f mesurable. Sous hypothèse de *domination*, le théorème de convergence dominée permet d'obtenir que f est intégrable sur X et $\int_X |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelle est cette hypothèse ?

A Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

B Il existe une fonction g mesurable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

C Il existe une fonction g intégrable t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Question 11 ♣ Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Cocher les hypothèses du théorème de convergence monotone, qui permet d'affirmer que $\int_X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$.

A Les f_n sont positives

B Les f_n sont intégrables

C (f_n) est une suite croissante de fonctions

D (f_n) est une suite de fonctions croissantes

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 ♣ Sur $[0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$ et f la fonction nulle. Alors (f_n) converge vers f

A simplement

B presque partout

C au sens où $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire pour la norme L^1).

D uniformément, c'est-à-dire que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 Pour toute série $\sum u_n$ de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

A Vrai
B Faux

Question 14 Concernant l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann.
A Sur un segment, il existe des fonctions intégrables pour Riemann mais pas pour Lebesgue.
B Il existe des fonctions intégrables pour Lebesgue mais pas pour Riemann.
C Une fonction est dite intégrable au sens de Lebesgue, si son intégrable au sens de Lebesgue existe

Question 15 Dans $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur le disque de centre l'origine et rayon 1 si et seulement si
A $\alpha > 1$
B $\alpha > 2$
C $\alpha < 2$
D $\alpha < 1$

Question 16 ♣ Quelles fonctions ci-dessous sont intégrables ?
A $x \mapsto \frac{1}{|x|^3}$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$
B $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1,+\infty[$
C $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 ♣ Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Choisir les conditions suffisantes permettant d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

A f est positive
B f est continue
C $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq \exp(-(x^2+y^2))$
D f est bornée
E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :
....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.* Remplir complètement *les cases voulues au stylo ou au crayon. Il est possible de gommer proprement et suffisamment une case remplie par erreur, ou d'y mettre du correcteur blanc, mais il ne faut pas effacer le contour des cases.

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D E
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C D E
Question 13 : A B
Question 14 : A B C
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D E