Examen 1 – CIP–EDP

04/05/2020

Cet examen de 2h comprend un exercice et deux problèmes, mutuellement indépendants. Le polycopié de cours et les notes de cours sont autorisés

Exercice 1. Échauffement

1. Soit $0 < a < b$ et $K = [0, +\infty[\times[a, b]$. En calculant $\int_K \exp(-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ de deux manières différentes, obtenir la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$$
2. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(\pi x)^n\mathrm{d}x$.
3. On note pour $a \in \mathbb{R}$, δ_a la distribution de Dirac en a.
   (a) Justifier qu'au sens des distributions, $\delta_{1/n} \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} \delta_0$ lorsque $n \to +\infty$.
   (b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = n\left(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}\right)$. Démontrer que $T_n \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} -2\delta_0'$ lorsque $n \to +\infty$.
   On pourra justifier et utiliser le fait que toute fonction test admet un développement limité à l'ordre 1 *en* 0

Problème 1. Modèle SIR

On s'intéresse à la modélisation d'une épidémie. On répartit la population en trois groupes dont les quantités en fonction du temps sont notées S, I, R (respectivement les sains, infectés, et immunisés). On néglige les effets de la démographie et on suppose la maladie non mortelle avec un taux de guérison $\gamma > 0$. On fixe aussi $\beta > 0$ et on propose le modèle suivant : pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) & (1) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) & (2) \\ R'(t) = \gamma I(t) & (3) \end{cases}$$

1. Comment interpréter le terme $-\beta S(t)I(t)$ dans (1) ?

On fixe désormais des conditions initiales $S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 \geq 0, R(0) = 0$. On note $N_0 = S_0 + I_0 + R_0$ et on suppose aussi que $\frac{\gamma}{\beta} < N_0$.

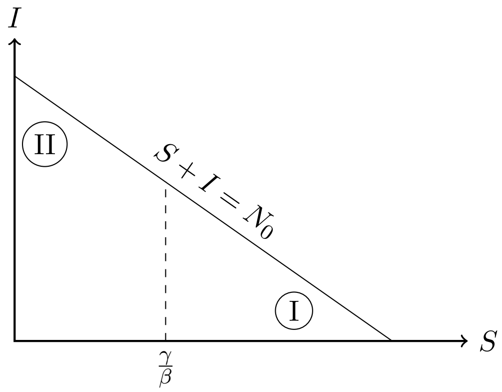
2. Justifier qu'il existe une unique solution maximale à (1)-(2)-(3) qui satisfait les conditions initiales. *On écrira soigneusement la fonction F qui gouverne ce problème de Cauchy.*

Dans la suite on notera cette solution (S, I, R) et on notera $[0, T^*[$ son intervalle de définition.

3. En utiliant la formule habituelle de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre, montrer que pour tout $t > 0$ on a $I(t) \geq 0$ et $S(t) \geq 0$. En déduire que pour tout $t \geq 0$, $R(t) \geq 0$.
4. Monter que pour tout $t \geq 0$, $S(t) + I(t) + R(t) = S_0 + I_0 + R_0$.
5. Déduire de la question précédente que $T^* = +\infty$.

Dans la suite on ne s'intéresse qu'au système (1)-(2) qu'on notera $\begin{pmatrix} S'(t) \\ I'(t) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \end{pmatrix}$. On souhaite étudier l'allure de ses solutions dans le plan (S, I), où une solution décrit donc une courbe (trajectoire) partant de la donnée initiale (S_0, I_0) et suivant le champ de vecteurs G.

6. Recopier le dessin ci-dessous et y représenter avec des flèches dont l'orientation est clairement visible, l'allure du champ de vecteurs G dans les zones I et II.



7. Effectuer des conjectures sur la monotonie au cours du temps et le comportement asymptotique de I selon les deux cas suivants : $S_0 < \frac{\gamma}{\beta}$, $S_0 > \frac{\gamma}{\beta}$, qu'on pourra agrémenter d'esquisses de trajectoires typiques (faire deux dessins).

Culture : les épidémiologistes parlent de $R_0 < 1$, ou $R_0 > 1$ (cas qualifié d'épidémie) avec $R_0 = S_0 \frac{\beta}{\gamma}$.

Problème 2. Condition aux limites mêlées

Ce problème est très guidé, n'en ayez pas peur. On cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } I =]0,1[\\ u(0) = 0, \ u'(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

avec $f \in \mathrm{L}^2(I)$. On notera

$$V = \left\{ v \in \mathrm{H}^1(I) \ : \ v(0) = 0 \right\}$$

1. Étude de V.
   (a) Justifier que l'application $T : v \mapsto v(0)$ est linéaire continue sur $\mathrm{H}^1(I)$.
   (b) En déduire que son noyau V est un fermé de $\mathrm{H}^1(I)$ et donc un espace de Hilbert lui aussi.
2. Formulation variationnelle.
   (a) Obtenir la formulation variationnelle suivante de (4) :
   $$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, \ \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv \tag{FV}$$
   (b) Démontrer que (FV) admet une solution unique $u \in V$. Dans la suite, u désignera cette solution.
3. Régularité : justifier que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
4. Retour à (4). Dans cette question, on suppose f continue sur $[0, 1]$.
   (a) Montrer que u est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et vérifie $-u'' + u = f$ partout sur $]0, 1[$ au sens classique.
   (b) Enfin, montrer que u vérifie la condition de bord mêlée : $u(0) = 0, \ u'(1) = 0$.