DM1 – CIP–EDP

À rendre pour le 07/04/2020.

Correction. Intégrale de Gauss par Fubini

1. aOn applique un changement de variable polaire, licite car la fonction intégrée est mesurable positive. On obtient
$$I_a = \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$
Par le théorème de Fubini
$$I_a = \int_0^a \int_0^{2\pi} r \exp(-r^2) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = -2\pi \frac{1}{2} \int_0^a -2r \exp(-r^2) \mathrm{d}r = \pi \left(1 - e^{-a^2}\right).$$
2. C'est le théorème de Fubini, la fonction intégrée étant mesurable positive, qui permet d'affirmer que
$$J_a = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \exp(-x^2)\exp(-y^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \exp(-x^2) \mathrm{d}x \exp(-y^2) \mathrm{d}y = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} \mathrm{d}x\right)^2$$
3. La fonction intégrée est positive et le carré de côté a contient le disque de rayon a mais est inclus dans le disque de rayon $\sqrt{2}a$.
4. Comme $I_a \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$ alors par encadrement J_a aussi, donc en prenant la racine carrée dans le résultat de la question 2 on obtient
$$\int_{-a}^a \exp(-x^2) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}$$
or par ailleurs
$$\int_{-a}^a \exp(-x^2) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \chi_{[-a,a]}(x) \mathrm{d}x \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \mathrm{d}x$$
par convergence monotone.

Correction. Produit de convolution

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Que $f \star g(x)$ existe est dû à l'inégalité de Hölder. Elle donne
$$|f \star g(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|^q \mathrm{d}y\right)^{1/q} = \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}$$
la dernière égalité est justifiée par le changement de variable (translation) $u = x - y,\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}y$. Cette majoration étant indépendante de x on en déduit que $f \star g$ est borné et que
$$\|f \star g\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}.$$
2. Notons $F(x,y) = f(x-y)g(y)$. Commençons par remarquer que
$$\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)| \mathrm{d}x = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \mathrm{d}x = \|f\|_{\mathrm{L}^1} g(y)$$
et donc
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)| \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \|f\|_{\mathrm{L}^1} \|g\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty$$

donc par Fubini appliqué à la fonction mesurable positive $|F|$, on obtient que F est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. En appliquant Fubini à cette fois à la fonction intégrable F on obtient alors que $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\mathrm{d}y$ est définie presque partout, c'est-à-dire $f \star g$ est définie presque partout. De plus en appliquant l'inégalité triangulaire on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |f \star g|(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|f\|_{\mathrm{L}^1} \|g\|_{\mathrm{L}^1}$$

ce qui justifie que $f \star g \in \mathrm{L}^1$ et donne l'inégalité désirée.

Correction. **Résolution de $T' = 0$ au sens des distributions**

1. Soit $\varphi \in (\mathbb{R})$. Le support de φ étant compact il est inclus dans un segment $[a,b]$. On a alors

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} c\varphi' = c\int_a^b \varphi' = c\left(\varphi(b) - \varphi(a)\right) = c(0-0) = 0.$$

2. (a) $(\Rightarrow)$. Supposons qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \psi'$. Alors $\int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} \psi' = 0$ par le même calcul que ci-dessus.
$(\Leftarrow)$. Supposons que $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 0$. Notons $[a,b]$ un segment contenant le support de φ. Posons $\psi(x) = \int_a^x \varphi(s)\mathrm{d}s$. Alors $\psi' = \varphi$. Il reste à vérifier que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ car φ l'est. Il reste seulment à vérifier que ψ est à support compact, mais pour $x < a$ on a bien $\psi(x) = 0$ (on intègre en dehors du support de φ) et pour $x > b$ on a $\psi(x) = \int_a^x \varphi(s)\mathrm{d}s = \int_a^b \varphi(s)\mathrm{d}s = 0$.

   (b) Il suffit de prendre n'importe quelle fonction test d'intégrale non-nulle et de la diviser par son intégrale, par exemple notons

$$\tilde{\theta} : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Il suffit alors de poser $\theta = \dfrac{\tilde{\theta}}{\int_{\mathbb{R}} \tilde{\theta}}$.

   (c) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Unicité : supposons qu'on ait une décomposition

$$\varphi = f + \lambda\theta$$

   avec $f = g' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et λ réel. En intégrant sur $\mathbb{R}$ on obtient $\int_{\mathbb{R}} \varphi = \lambda \int_{\mathbb{R}} \theta = \lambda$. L'unique décomposition possible est donc

$$\varphi = \left(\varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right)\theta\right) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right)\theta$$

   Existence : vérifions que la décomposition ci-dessus convient. Il ne reste qu'à vérifier que $(\varphi - (\int_{\mathbb{R}} \varphi)\,\theta)$ est bien une fonction test dérivée. Mais son intégrale est nulle, et la question 2(a) conclut.

   (d) Supposons $T' = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi \rangle &= \left\langle T, \underbrace{\left(\varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right)\theta\right)}_{\psi'} + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right)\theta \right\rangle \\ &= \langle T, \psi' \rangle + \left\langle T, \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right)\theta \right\rangle \\ &= -\langle T', \psi \rangle + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right)\langle T, \theta \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle T, \theta \rangle\, \varphi\end{aligned}$$

   ce qui prouve que $T = \langle T, \theta \rangle$ est une fonction, constante.

Correction. **Une formulation variationnelle de Robin**

1. En multipliant par v régulière et en intégrant par parties il vient
$$-\int_0^1 u''v = -[u'v]_0^1 + \int_0^1 u'v' = -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v' = \frac{u(1)v(1)}{b} + \frac{u(0)v(0)}{a} + \int_0^1 u'v'.$$
en supposant $\boxed{a \neq 0, b \neq 0}$. On propose donc la formulation suivante :
$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1(]0,1[) \text{ telle que} \\ \frac{u(1)v(1)}{b} + \frac{u(0)v(0)}{a} + \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv \quad \forall v \in \mathrm{H}^1(]0,1[) \end{cases} \tag{1}$$
Remarque importante : par injection continue (en dimension 1) de H^1 dans $\mathcal{C}^0$, les termes $u(0), v(0), u(1), v(1)$ ont bien un sens. En revanche cela n'aurait pas de sens de garder des termes en $u'(0)$ ou $u'(1)$ dans la formulation variationnelle car si $u \in \mathrm{H}^1$ alors u' n'est définie que presque partout donc $u'(0)$ et $u'(1)$ n'ont a priori pas de sens ! C'est justement tout le travail de la suite que de dire qu'en fait, pour la solution de cette équation, si.

2. Ici on a les formes bilinéaires et linéaires sur $V = \mathrm{H}^1(]0,1[)$ respectives
$$a(u,v) = \int_0^1 u'v' + \frac{u(1)v(1)}{b} + \frac{u(0)v(0)}{a} + \int_0^1 uv, \qquad \mathrm{L}(v) = \int_0^1 fv$$
   - $H^1(]0,1[)$ est bien un espace de Hilbert.
   - L est clairement linéaire, et sa continuité provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   - a est
     - clairement bilinéaire.
     - coercive si $\boxed{a > 0, b > 0}$, en effet on a alors
     $$a(u,u) = \int_0^1 u'^2 + \frac{u(1)^2}{b} + \frac{u(0)^2}{a} + \int_0^1 u^2 \geq \int_0^1 u'^2 + \int_0^1 u^2 = \|u\|_{\mathrm{H}^1}^2$$
     - continue car par inégalités triangulaires
     $$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq (u,v)_{\mathrm{H}^1} + \frac{1}{b}|u(1)||v(1)| + \frac{1}{a}|u(0)||v(0)| \\ &\leq (u,v)_{\mathrm{H}^1} + \frac{1}{b}\|u\|_{\mathrm{L}^\infty}\|v\|_{\mathrm{L}^\infty} + \frac{1}{a}\|u\|_{\mathrm{L}^\infty}\|v\|_{\mathrm{L}^\infty} \\ &\leq (u,v)_{\mathrm{H}^1} + M\|u\|_{\mathrm{L}^\infty}\|v\|_{\mathrm{L}^\infty} \qquad \text{avec } M = 2\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \\ &\leq (u,v)_{\mathrm{H}^1} + MC\|u\|_{\mathrm{H}^1}\|v\|_{\mathrm{H}^1} \qquad \text{par injection continue de } \mathrm{H}^1 \text{ dans } \mathcal{C}^0 \\ &\leq (MC+1)\|u\|_{\mathrm{H}^1}\|v\|_{\mathrm{H}^1} \qquad \text{par Cauchy-Schwarz} \end{aligned}$$

   Le théorème de Lax-Milgram assure alors que cette formulation variationnelle admet une unique solution $u \in \mathrm{H}^1(]0,1[)$.

3. Par injection de Sobolev, il suffit de montrer que u est en fait $\mathrm{H}^2(]0,1[)$ pour montrer qu'elle est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Comme f est continue sur $[0,1]$ elle y est L^2. Mais on a alors pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(]0,1[)$, comme v est nulle au bord tous les termes en 0 et en 1 disparaissent et il reste
$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 (f-u)v$$
donc au sens des distributions sur $]0,1[$ on a $u'' = u - f \in \mathrm{L}^2$ donc $u'' \in \mathrm{L}^2$ donc $u \in H^2$ ce qui conclut. De plus comme f est continue sur $[0,1]$ on a alors $u'' = u - f$ qui l'est aussi, donc u est $\mathcal{C}^2([0,1])$.

4. Comme vu ci-dessus, en écrivant la formulation variationnelle dans un premier temps avec $v \in \mathcal{D}(]0,1[)$ on obtient

$$0 = \int_0^1 (u'v' + uv - fv) = \int_0^1 (-u'' + u - f)v$$

en intégrant par parties (v est nulle au bord). Ceci étant valable pour tout $v \in \mathcal{D}(]0,1[)$ on a bien l'équation recherchée

$$\boxed{-u'' + u - f = 0 \text{ sur }]0,1[}$$

Pour obtenir la condition de bord on écrit maintenant la formulation contre des fonctions $v \in \mathcal{D}([0,1])$ qui peuvent donc être quelconques en 0 et en 1. On a

$$a(u,v) = \mathrm{L}(v)$$

donc

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (u'v' + uv - fv) + \frac{u(1)v(1)}{b} + \frac{u(0)v(0)}{a} \\ &= \int_0^1 (-u'' + u - f)v + [vu']_0^1 + \frac{u(1)v(1)}{b} + \frac{u(0)v(0)}{a} \\ &= v(1)\left(u'(1) + \frac{u(1)}{b}\right) + v(0)\left(-u'(0) + \frac{1}{a}u(0)\right) \end{aligned}$$

Et comme $v(0)$ et $v(1)$ peuvent être quelconques, on obtient bien la condition de bord désirée :

$$\boxed{u'(1) + \frac{u(1)}{b} = -u'(0) + \frac{1}{a}u(0) = 0.}$$