Examen – EDP

08/04/2021

Durée : 2h. Seul le polycopié de cours (éventuellement annoté) est autorisé. Tout autre document ou appareil est interdit.

Exercice 1. Résolution de $T' = 0$

Dans cet exercice on se propose de résoure l'équation différentielle, au sens des distributions,

$$T' = 0$$

1. Montrer soigneusement que si $T = c$ est constante (c'est-à-dire que $\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} c\varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$) alors, au sens des distributions, $T' = 0$.
2. Étude de la réciproque.
   (a) Montrer qu'une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une dérivée (c'est-à-dire qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \psi'$) si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. *Pour la réciproque, on pourra penser à poser $\psi(x) = \int_a^x \varphi(s)\mathrm{d}s$ où $[a, b]$ désigne un compact contenant le support de φ.*
   (b) Justifier qu'il existe une fonction test $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \theta(x)\mathrm{d}x = 1$.
   (c) Montrer que toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction test dérivée et d'un multiple de θ.
   (d) Conclure.

Exercice 2. Le problème de Képler

L'équation qui régit la position $q(t) \in \mathbb{R}^3$ d'un corps céleste soumis à l'attraction d'une étoile supposée fixe à l'origine est donnée par

$$q'' = -K\frac{q}{\|q\|^3}$$

où $K > 0$ est une constante (qui dépend de la masse des deux corps). On pose $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

1. On fixe une position initiale $q_0 \in \Omega$ et une vitesse initiale $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Justifier soigneusement qu'il existe une unique solution maximale $q\colon [0, T^*[\to \Omega$ qui résout l'équation différentielle étudiée et qui vérifie $q(0) = q_0,\ q'(0) = p_0$.

On suppose dorénavant que q_0 et p_0 ne sont pas colinéaires. On pose $A(t) = q(t) \wedge q'(t)$ (produit vectoriel). On rappelle quelques propriétés de calcul vectoriel :

- si f, g sont deux fonctions vectorielles dérivables et B une application bilinéaire alors $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable et a pour dérivée $t \mapsto B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$.
- si u, v, w sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ alors $u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$ (où $\cdot$ désigne le produit scalaire).

2. En étudiant $A(t)$ montrer que le mouvement reste inclus dans le plan engendré par q_0 et p_0.
3. Montrer que la quantité vectorielle $e(t) = \frac{1}{K}q'(t) \wedge A(t) - \frac{q(t)}{\|q(t)\|}$ et la quantité scalaire $H(t) = \frac{1}{2}\|q'(t)\|^2 - \frac{K}{\|q(t)\|}$ sont constantes au cours du temps.

4. En déduire que $\|q(t)\|$ reste bornée et que $q(t)$ ne s'approche pas de 0 (on pourra montrer par exemple que $\frac{1}{\|q(t)\|}$ reste bornée).
5. Que peut-on en conclure sur T^* ?

Exercice 3. Condition de bord de Robin mixte.

On fixe $f \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$ et $k \geq 0$ un réel. On étudie le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } I =]0,1[\\ u'(0) = ku(0), \quad u(1) = 0. \end{cases} \tag{R}$$

1. Justifier que si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{I})$ est une solution de (R) alors pour tout $v \in \mathcal{C}^2(\overline{I})$ telle que $v(1) = 0$ on a
$$\int_I u'v' + \int_I uv + ku\,(0)\,v(0) = \int_I fv.$$

Dans la suite, on pose $H = \{v \in \mathrm{H}^1 \ : \ v(1) = 0\}$ et on s'intéresse désormais au problème suivant :

$$\text{Trouver } u \in H \text{ tel que pour tout } v \in H, \quad \int_I u'v' + \int_I uv + ku\,(0)\,v(0) = \int_I fv \tag{R-FV}$$

.

2. Justifier que H est un sous-espace fermé de $\mathrm{H}^1(I)$.
3. Montrer que (R-FV) admet une solution unique qu'on notera u dans la suite
4. Justifier que $u \in H^2(I)$ et donc $u \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$.

Dans la suite, on suppose $f \in \mathcal{C}(\overline{I})$.

5. Justifier que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{I})$ et vérifie $-u'' + u = f$ partout sur I et $u(1) = 0$.
6. Justifier que $u'(0) = ku(0)$.