DM1 – EDP

À rendre pour le 08/04/2021.

Exercice 1. Échauffement

1. Justifier qu'au sens des distributions, $\delta_{1/n} \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} \delta_0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = n\left(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}\right)$. Démontrer que $T_n \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} -2\delta_0'$ lorsque $n \to +\infty$.

   On pourra justifier et utiliser le fait que toute fonction test admet un développement limité à l'ordre 1 *en* 0

Problème 1. Modèle SIR

On s'intéresse à la modélisation d'une épidémie. On répartit la population en trois groupes dont les quantités en fonction du temps sont notées S, I, R (respectivement les sains, infectés, et immunisés). On néglige les effets de la démographie et on suppose la maladie non mortelle avec un taux de guérison $\gamma > 0$. On fixe aussi $\beta > 0$ et on propose le modèle suivant : pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) & (1) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) & (2) \\ R'(t) = \gamma I(t) & (3) \end{cases}$$

1. Comment interpréter le terme $-\beta S(t)I(t)$ dans (1) ?

On fixe désormais des conditions initiales $S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 \geq 0, R(0) = 0$. On note $N_0 = S_0 + I_0 + R_0$ et on suppose aussi que $\frac{\gamma}{\beta} < N_0$.

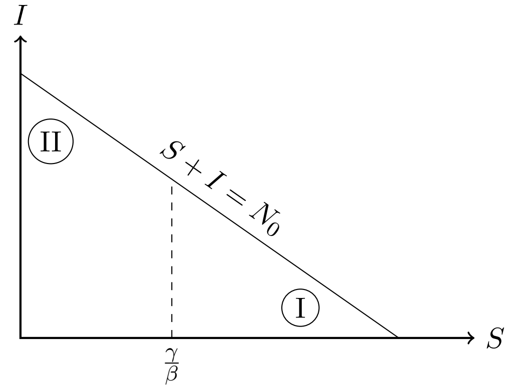
2. Justifier qu'il existe une unique solution maximale à (1)-(2)-(3) qui satisfait les conditions initiales. *On écrira soigneusement la fonction F qui gouverne ce problème de Cauchy.*

Dans la suite on notera cette solution (S, I, R) et on notera $[0, T^*[$ son intervalle de définition.

3. En utilisant la formule habituelle de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre, montrer que pour tout $t > 0$ on a $I(t) \geq 0$ et $S(t) \geq 0$. En déduire que pour tout $t \geq 0$, $R(t) \geq 0$.
4. Monter que pour tout $t \geq 0$, $S(t) + I(t) + R(t) = S_0 + I_0 + R_0$.
5. Déduire de la question précédente que $T^* = +\infty$.

Dans la suite on ne s'intéresse qu'au système (1)-(2) qu'on notera $\begin{pmatrix} S'(t) \\ I'(t) \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \end{pmatrix}$. On souhaite étudier l'allure de ses solutions dans le plan (S, I), où une solution décrit donc une courbe (trajectoire) partant de la donnée initiale (S_0, I_0) et suivant le champ de vecteurs G.

6. Recopier le dessin ci-dessous et y représenter avec des flèches dont l'orientation est clairement visible, l'allure du champ de vecteurs G dans les zones I et II.



7. Effectuer des conjectures sur la monotonie au cours du temps et le comportement asymptotique de I selon les deux cas suivants : $S_0 < \frac{\gamma}{\beta}$, $S_0 > \frac{\gamma}{\beta}$, qu'on pourra agrémenter d'esquisses de trajectoires typiques (faire deux dessins).

Culture : les épidémiologistes parlent de $R_0 < 1$, ou $R_0 > 1$ (cas qualifié d'épidémie) avec $R_0 = S_0\frac{\beta}{\gamma}$.

Problème 2. Condition aux limites de Neumann non homogène

On cherche à résoudre le problème de Neumann non homogène

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } I =]0,1[\\ u'(0) = \alpha,\ u'(1) = \beta \end{cases} \tag{4}$$

où α et β sont deux réels fixés et $f \in \mathrm{L}^2(I)$.

1. Analyse : obtenir la formulation variationnelle suivante de (4) :

$$\text{Trouver } u \in H^1(I) \text{ tel que } \forall v \in H^1(I),\ \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv - \alpha v(0) + \beta v(1) \tag{FV}$$

2. Résolution : démontrer que (FV) admet une solution unique $u \in V$. Dans la suite, u désignera cette solution.
3. Régularité : justifier que u est dans $H^2(I)$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
4. Retour à (4). Dans cette question, on suppose f continue sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que u est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et vérifie $-u'' + u = f$ partout sur $]0,1[$ au sens classique.
   (b) Enfin, montrer que u vérifie la condition de bord désirée.