DM1 – CIP

À rendre pour le 27/12/2020.

Exercice 1. Lemme de Scheffé

1. Soit (f_n) une suite de fonctions positives de $\mathrm{L}^1(X)$ qui converge presque partout vers f, et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x = \int_X f(x)\mathrm{d}x$ et est finie.
   (a) Montrer que $0 \leq (f - f_n)_+ \leq f$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X (f - f_n)_+(x)\mathrm{d}x = 0$.
   (b) Monter que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X (f - f_n)_-(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X (f - f_n)_+(x)\mathrm{d}x$.
   (c) En déduire que (f_n) converge vers f dans $\mathrm{L}^1(X)$.
2. Soit $f_n(x) = n\chi_{[0,1/n]}(x) - n\chi_{[-1/n,0[}(x)$.
   (a) Montrer que (f_n) converge presque partout vers 0.
   (b) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (c) La suite (f_n) converge-t-elle vers 0 dans L^1 ?

Exercice 2. Inégalité de Hardy

Soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$. Pour tout $x > 0$ on pose

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_{[0,x]} f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On suppose f continue à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que F est solution d'une équation différentielle linéaire simple.
   (b) En déduire que
   $$\int_{\mathbb{R}_+} F^2(x)\mathrm{d}x = 2 \int_{\mathbb{R}_+} F(x)f(x)\mathrm{d}x.$$
   (c) Montrer que $\|F\|_{\mathrm{L}^2} \leq 2\|f\|_{\mathrm{L}^2}$.
3. On ne suppose plus que f est continue à support compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$ et qui converge vers f dans L^2.
   (a) Justifier l'existence de la suite (f_n).
   (b) Soit $F_n(x) = \frac{1}{x} \int_{[0,x]} f_n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2.
   (c) Soit $\hat{F}$ la limite de (F_n). Montrer que
   $$\|\hat{F}\|_{\mathrm{L}^2} \leq 2\|f\|_{\mathrm{L}^2}$$
   (d) Montrer que $\hat{F} = F$ presque partout.
   (e) En déduire que $\|F\|_{\mathrm{L}^2} \leq 2\|f\|_{\mathrm{L}^2}$ et donc que l'application $f \mapsto F$ est continue.

Exercice 3. Le produit scalaire de L^2 ne rend pas $\mathbb{R}[X]$ complet

1. Montrer que $(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Justifier brièvement que ce produit scalaire fait de $\mathbb{R}_N[X]$ un espace de Hilbert.
3. Montrons que ce n'est pas le cas pour $\mathbb{R}[X]$.
   (a) Soit $P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$. Montrer que (P_n) converge uniformément (c'est-à-dire dans $\mathrm{L}^\infty([0,1])$) vers exp sur $[0,1]$. *Indication : pour ceux qui ne la connaissent pas, se renseigner sur et utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.*
   (b) En déduire que P_n converge vers exp dans $\mathrm{L}^2([0,1])$.
   (c) exp est-elle un polynôme ? Conclure.