Décomposition de Jordan pratique

I) Dimension 2

Si $M \in M_2(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable elle est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$: pour obtenir cette forme, considérer $v \in \mathrm{Ker}(M-\lambda I)^2 \setminus \mathrm{Ker}(M-\lambda I)$ et la base $(\underbrace{(M-\lambda I)v}_{\text{noté } e_1}, \underbrace{v}_{e_2})$: on a bien $Me_1 = (M-\lambda I)e_1 + \lambda e_1$

$$= \cancel{(M-\lambda I)^2 v} + \lambda e_1$$

et $Me_2 = (M-\lambda I)e_2 + \lambda e_2 = e_1 + \lambda e_2$.

II) Dimension 3

En dimension 3 une matrice $M \in M_3(\mathbb{C})$ est soit diagonalisable, soit semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ (avec λ et μ potentiellement identiques) soit semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Que faire si M n'est pas diagonalisable ?

1) Pour les (le[au plus] en fait ! sinon c'est diag.) sous espace propre qui a la bonne dim. (i.e m_λ) en prendre une base.

2) Si $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda I) \neq m_\lambda$, regarder $\dim \mathrm{Ker}((A-\lambda I)^2)$. Si sa vaut m_λ, prendre $v \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ et considérer

$$\mathcal{B} = ((A-\lambda I)v, v).$$

La coller avec un éventuel vecteur du 1) et c'est fini $\nearrow$ $M \sim \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

S'il n'y avait pas de vecteur dans 1), la coller avec un $u \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ et c'est fini

$\hookrightarrow M \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

3) Si sa vaut pas m_λ alors $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^3 = m_\lambda$ (par le lemme des noyaux).

Prendre alors $v \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^3 \setminus \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2$ et $\mathcal{B} = ((A-\lambda I)^2 v, (A-\lambda I)v, v)$

$\hookrightarrow M \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

III) Dimension n (pour les curieux).

Plus de choses peuvent se passer mais la philosophie est la même

- séparer le travail sur les valeurs propres en
  - prenant des bases des espaces propres de dim m_λ
  - aller chercher le sous-espace caractéristique pour les autres,

  càd $\ker(A-\lambda I)^{k_\lambda}$ avec k_λ minimal tq $\dim(\ker(A-\lambda I)^{k_\lambda}) = m_\lambda$.

  Prendre alors $v \in \ker(A-\lambda I)^{k_\lambda} \setminus \ker(A-\lambda I)^{k_\lambda - 1}$ et
  $$B_1^\lambda = \left((A-\lambda I)^{k_\lambda - 1} v, \dots, v \right)$$
  Si $k_\lambda = m_\lambda$ c'est fini (λ aura un seul bloc de Jordan de taille m_λ)

  Sinon recommencer l'opération dans un supplémentaire de B_1^λ dans $\ker(A-\lambda I)^{k_\lambda}$ (trouvé p.ex par orthogonalité) stable par M.
- coller toutes les familles construites.

Remarques :

- ⚠ en dim ≥ 5 il n'existe pas de moyen de calculer les v.p. exactement donc tout ça n'est que théorique ! (Mais utile d'un point de vue théorique).

- De par la nature de l'algorithme on a la proposition intéressante suivante :

$$\forall \lambda \in Sp(M), \quad \begin{cases} \dim \ker(A-\lambda I) = \#\text{de blocs de Jordan associés à } \lambda \\ \dim \ker(A-\lambda I)^{i} - \dim \ker(A-\lambda I)^{i-1} = \#\text{ de blocs de Jordan associés à } \lambda \text{ de taille} \geq i. \end{cases}$$

- La réduction de Jordan est le must de la réduction, c'est donc normal que ce soit un peu compliqué : un endomorphisme est entièrement caractérisé par son expression dans une base de Jordan.
- Pour d'autres réductions utiles et plus simples on peut citer :

  Schur ↓ (Trigonalisation), Dunford ↓ $D+N$, $DN=ND$