

Le groupe circulaire

Laurent DIETRICH *

16 mai 2011

Réf. : Michèle Audin, géométrie – à retravailler!

Théorème. *Le groupe circulaire G est exactement l'ensemble des transformations de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui préservent la famille des cercles et des droites.*

Remarque. On fait de la « géométrie plane » au sens où l'on voit $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ comme le plan \mathbb{C} muni d'un point à l'infini. On peut aussi, via la projection stéréographique, voir cet espace muni de la topologie de compactifié d'Alexandrov, comme la sphère unité S^2 : c'est ce qu'on appelle la sphère de Riemann. On a une correspondance entre d'une part les « cercles » sur cette sphère et d'autre part les cercles de \mathbb{C} ainsi que les droites, munies du point à l'infini (c'est ce qu'on appelle « droite »). Les cercles ne passant pas par le pôle Nord correspondent aux cercles du plan.

Sens direct : par définition, G est engendré par les homographies et la conjugaison complexe. On a vu dans le plan que les homographies préservent la famille des droites et des cercles (on peut éventuellement le montrer pendant le développement...), et il est évident que la conjugaison complexe en fait de même (c'est la symétrie par rapport à l'axe réel). On peut aussi dire que G est engendré par les similitudes, $z \mapsto \frac{1}{z}$ ainsi que la conjugaison et constater que $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'est autre que la symétrie par rapport au plan équatorial si l'on se place du point de vue sphère de Riemann, symétrie qui conserve les cercles.

Réciproquement soit $\phi : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ une bijection qui préserve la famille des droites et des cercles. On veut montrer l'appartenance de ϕ à G donc quitte à composer ϕ par une homographie, on peut supposer que $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, $\phi(\infty) = \infty$ et donc que $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (la bijection induite) préserve la famille des droites et la famille des cercles, séparément cette fois.

En effet, une droite est envoyée sur une droite puisqu'une droite contient ∞ (donc son image par ϕ aussi), or un cercle ne le contient pas. Un cercle, quant à lui, est envoyé sur un cercle car s'il était envoyé sur une droite, il existerait un point M du cercle tel que $\phi(M) = \infty$, et par bijectivité, $M = \infty$ ce qui est exclu.

On va montrer que ϕ préserve les divisions harmoniques.

Lemme. *Soient a, b, c trois points distincts du plan affine. Il existe un unique point d qui réalise la division harmonique $[a, b, c, d] = -1$. Si a, b et c ne sont pas alignés, d est construit en figure 1, s'ils le sont, d est construit en figure 2. Ces constructions s'expriment uniquement en matière d'intersections et de tangences de cercles et de droites.*

Démonstration. Cas cocyclique : on « envoie d à l'infini dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ». Plus précisément on applique l'homographie $z \mapsto \frac{1}{z-d}$. Elle n'est autre que l'inversion de pôle d et puissance 1 suivie de la conjugaison complexe. On sait qu'une inversion transforme une droite ne passant par son pôle en un cercle γ passant, et un cercle passant par son pôle en une droite γ' ne passant pas, si

*<http://perso.eleves.bretagne.ens-cachan.fr/~ldiet783>

bien qu'on obtient la figure 2 à similitude près (il y a la conjugaison – symétrie par rapport à l'axe réel à appliquer après l'inversion). En tous cas, on remarque que c' est le milieu de $[a'b']$ car il coupe l'axe radical des deux cercles sur une tangente commune, et que de manière générale $[u, v, w, \infty] = -1$ ssi $w = \frac{u+v}{2}$. On a donc bien une division harmonique ici, et par conservation du birapport, on en avait une à l'origine (unique par unicité du birapport).

Cas alignés : la figure n'est pas équivoque, aussi j'explicité la méthode. On choisit m quelconque en dehors de la droite (ab) et on trace deux droites passant par c et coupant $[ma]$. On construit ainsi un quadrilatère, et la droite passant par m et le milieu de ce quadrilatère coupe (ab) en d qui convient. Deux problèmes se posent. Premièrement, *a priori* on pourrait avoir plusieurs d par une telle méthode ! Il n'en est rien, les figures 3 et 4 donnent deux exemples de configurations différentes où l'on obtient bien le même d . Montrons cela (ainsi que le fait que d convient !) par un envoi à l'infini, comme avant ou presque. On envoie (dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ cette fois !) la droite (mc) sur la droite à l'infini, (am) et (bm) deviennent parallèles et on a la figure 5. Le quadrilatère est un parallélogramme, ses diagonales se coupent donc en leur milieu et d est le milieu de $[ab]$ et on a bien $[a, b, \infty, d] = -1$. On conclut par conservation du birapport, mais on obtient seulement que le birapport des quatre points vaut -1 , comme birapport de quatre points d'une droite projective réelle (contenue dans le plan projectif). Le théorème du plan indique ce birapport coïncide avec celui des points vu comme appartenant à $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ tout court. \square

Maintenant, comme ϕ préserve les droites et les cercles, ainsi que les tangences (elle est injective) elle préserve les situations des figures 1 et 3 donc les divisions harmoniques. Reste à voir que :

Théorème. *Soit $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui fixe 0 et 1 et préserve les divisions harmoniques. Alors ϕ est un automorphisme de corps de \mathbb{C} .*

En effet, une fois ce lemme prouvé on aura terminé puisque ϕ envoie une droite sur une droite et fixe 0 et 1 : elle préserve donc \mathbb{R} . Or, le seul automorphisme de \mathbb{C} qui préserve \mathbb{R} est l'identité ou la conjugaison complexe, qui sont bien dans G . Comme on a uniquement composé la transformation originale avec une homographie pour arriver jusqu'ici, on conclut même que

$$G = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad \middle| \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ tels que } ad - bc \neq 0 \right\}$$

Démonstration. La caractérisation des milieux $[a, b, c, \infty] = -1$ ssi $c = \frac{a+b}{2}$ donne que ϕ préserve les milieux donc pour tout $a, b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\phi(a)+\phi(b)}{2}$. Comme $\phi(0) = 0$, en prenant $b = 0$ on a $\phi(a) = 2\phi\left(\frac{a}{2}\right)$, ce qui appliqué à l'égalité précédente donne

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b).$$

En particulier comme $\phi(0) = 0$,

$$\phi(-a) = -\phi(a).$$

Maintenant, pour tout $a \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $[a, -a, a^2, 1] = \frac{1+a}{1-a} \bigg/ \frac{a^2+a}{a^2-a} = -1$. Donc d'une part par préservation du birapport, et aussi en appliquant cette identité à $\phi(a)$ comme à n'importe quel point, on a

$$[\phi(a), \phi(-a), \phi(a^2), 1] = [\phi(a), -\phi(a), \phi(a)^2, 1] = -1.$$

Et comme $\phi(-a) = -\phi(a)$,

$$[\phi(a), -\phi(a), \phi(a^2), 1] = [\phi(a), -\phi(a), \phi(a)^2, 1].$$

Cela donne aussi évidemment

$$[\phi(a), -\phi(a), 1, \phi(a^2)] = [\phi(a), -\phi(a), 1, \phi(a)^2]$$

et par unicité du birapport, $\phi(a^2) = \phi(a)^2$. Maintenant il suffit d'écrire, pour tout $a, b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

En appliquant successivement les identités $\phi(x-y) = \phi(x) - \phi(y)$, $\phi(x)^2 = \phi(x^2)$ et la préservation des milieux, on obtient

$$\phi(ab) = \left(\frac{\phi(a) + \phi(b)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\phi(a) - \phi(b)}{2}\right)^2$$

soit $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ et donc ϕ est bien un automorphisme de corps, ce qui termine la démonstration. \square

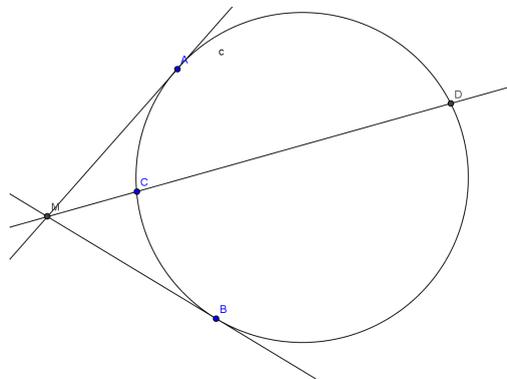


FIGURE 1 – Construction de la division harmonique, cas cocyclique

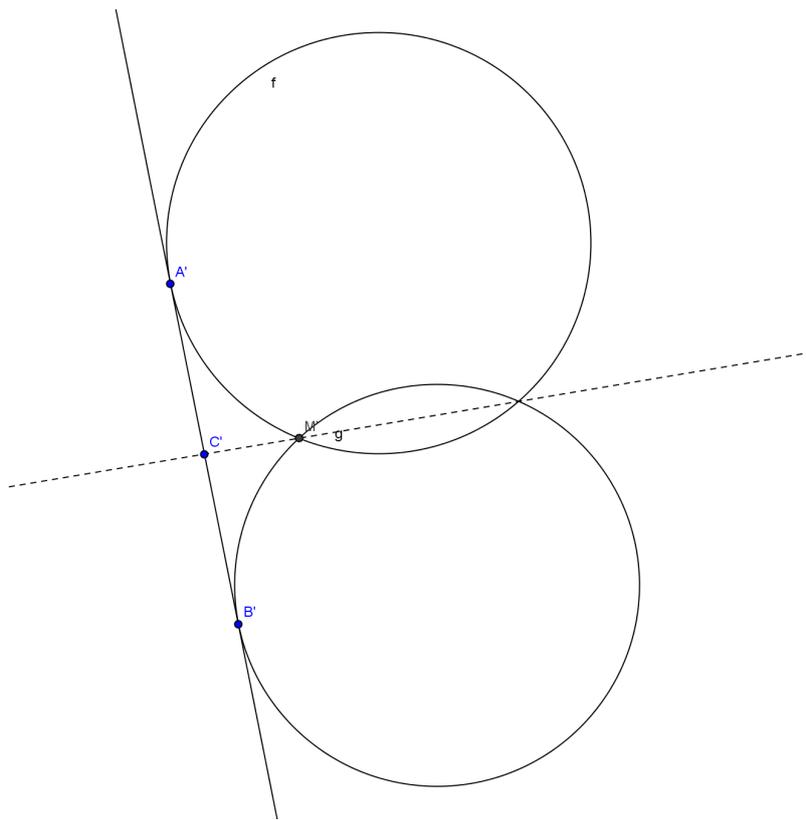


FIGURE 2 – Envoi de d à l'infini

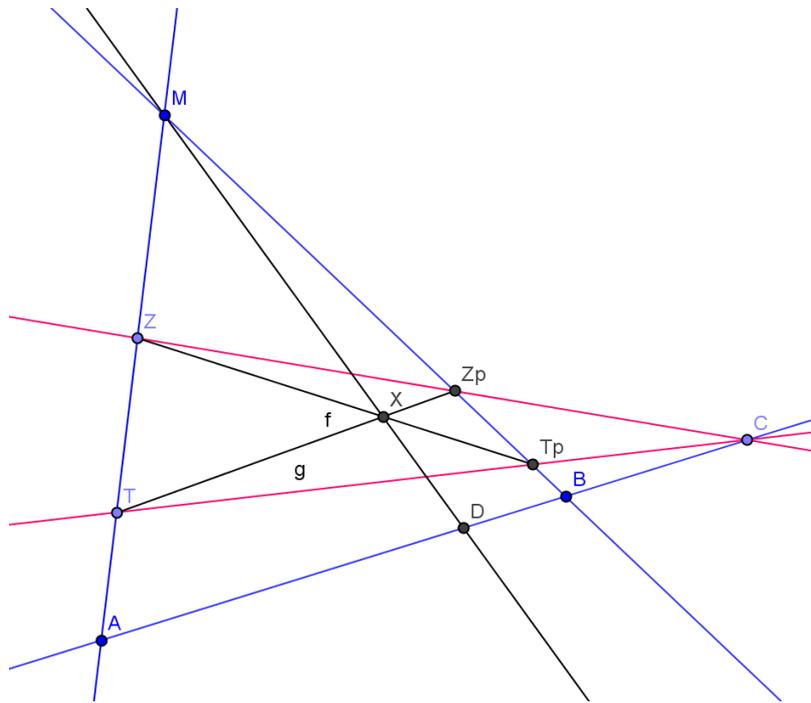


FIGURE 3 – Construction de la division harmonique, cas alignés

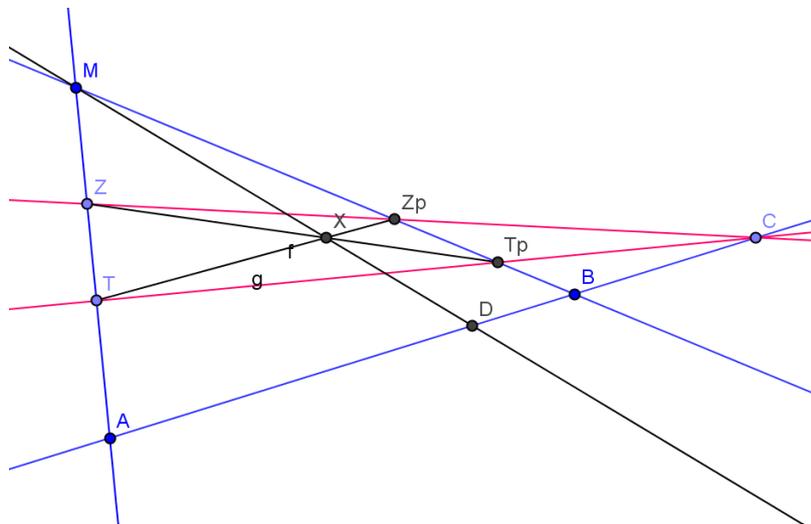


FIGURE 4 – Construction de la division harmonique, cas alignés, une autre situation

